Prof. Dr. G. Rosenberger
V. große Rebel

Abgabe: Mo, 06.06.2005, 14h

Übungen zur linearen Algebra und analytischen Geometrie II
Übungsblatt 8

Aufgabe 1:
Sei $V := \mathrm{M}_n(K)$. Zeigen Sie für $b : V \times V \to K$ mit $b(A, B) := \mathrm{spur}(A^\top B)$ für $A, B \in M_n(K)$:

a) b ist symmetrische Bilinearform auf V, das sog. *Killingprodukt* zweier Matrizen A und B aus $\mathrm{M}_n(K)$.

b) Berechnen Sie für $V = \mathrm{M}_2(K)$ das orthogonale Komplement $\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\}^\perp$.

c) Geben Sie eine Orthogonalbasis für $V = \mathrm{M}_2(K)$ an.

Aufgabe 2:

a) Es sei $q : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}$ die quadratische Form mit

$$q(x_1, \ldots, x_5) := 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_4^2 - 2x_1x_2 + 2x_2x_3 - 4x_2x_4 - x_4x_5.$$

Berechnen Sie durch Angabe einer Darstellungsmatrix $\mathrm{M}_E(b)$ bzgl. der Standardbasis E die zugehörige sym. Bilinearform b und bestimmen Sie eine Orthogonalbasis von V (bzgl. b).

b) Suchen Sie einen endlich dimensionalen K-Vektorraum V und eine Bilinearform $b : V \times V \to K$ mit $b(v, w) = b(w, v)$ für alle $v, w \in V$, so dass V bezüglich b keine Basis $\{v_1, \ldots, v_n\}$ mit $b(v_i, v_j) = 0$ für $1 \leq i \neq j \leq n$ besitzt.
Hinweis: Die Generalvoraussetzung des Vorlesungsabschnitts über symmetrische Bilinearformen schränkt die Suche stark ein.

Aufgabe 3:
Überprüfen Sie, welche der folgenden Funktionen $< \ , \ >: V \times V \to K$ in den jeweiligen K-Vektorraum V ein (reelles bzw. komplexes) Skalarprodukt definieren.

a) In $V = \mathbb{R}^3$ die Funktion $< x, y >:= x^t A y$ mit $A := \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

b) In $V = C[a, b]$ die Funktion $< f, g >:= \max\{|f(x)g(x)|;\ x \in [a, b]\}$.

c) In $V = \mathbb{C}^3$ die Funktion $< x, y >:= x^t A \bar{y}$ mit $A := \begin{pmatrix} 2 & i & 0 \\ -i & 2 & -i \\ 0 & i & 2 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 4:
Wir betrachten die Matrix

$$A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 1+i & 2i \\ 1-i & a^2 & 0 \\ -2i & 0 & a \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{C}).$$

Bestimmen Sie alle $a \in \mathbb{R}$, so dass $A(a)$ positiv definit ist.