Prof. Dr. G. Rosenberger
V. große Rebel

Abgabe: Mo, 13.06.2005, 14h

Übungen zur linearen Algebra und analytischen Geometrie II
Übungsblatt 9

Aufgabe 1:
Sei $< x, y >:= x^t A\overline{y}$ das Standardskalarprodukt auf dem $\mathbb{C}^n$ mit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. Zeigen Sie:

a) $\forall x, y \in \mathbb{C}^n$ gilt $< A^t x, y >=< x, \overline{A} y >$.

b) Jede hermitsche Matrix hat nur reelle Eigenwerte.

Aufgabe 2:
Sei V ein K-Vektorraum mit Skalarprodukt $< \, , \, >$ und $\mathcal{V} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ eine orthonormale Familie in V. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(1) $\mathcal{V}$ ist eine Basis von V.

(2) Ist $x \in V$ mit $< x, v_i >= 0$ für alle $1 \leq i \leq n$, so gilt $x = 0$.

(3) $\sum\limits_{i=1}^{n} K \cdot v_i = V$.

(4) Für alle $x \in V$ gilt $x = \sum\limits_{i=1}^{n} < x, v_i > v_i$.

(5) Für alle $x, y \in V$ gilt $< x, y >= \sum\limits_{i=1}^{n} < x, v_i >< v_i, y >$.

(6) Für alle $x \in V$ gilt $\|x\|^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} | < x, v_i > |^2$.

Hinweis: Ringschluss (1) $\Rightarrow \cdots \Rightarrow$ (6) $\Rightarrow$ (1).

Aufgabe 3:
Bestimmen Sie mit dem Schmidtschen Verfahren eine Orthonormalbasis des folgenden Unterraums des $\mathbb{R}^5$:

$$\operatorname{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}.$$

Aufgabe 4:
Sei $(V, < \, , \, >)$ ein euklidischer oder unitärer Vektorraum.

a) Sei $\{v_1, \ldots, v_k\}$ Orthonormalbasis eines Unterraums W von $(V, < \, , \, >)$ und $v \in V$. Zeigen Sie, dass für alle $w \in W$ und den Vektor $w_0 := \sum\limits_{i=1}^{k} < v, v_i > v_i$ aus W gilt:
$$\|v - w\| \geq \|v - w_0\|.$$

b) Folgern Sie aus a) die *Besselsche Ungleichung*: Ist $\{v_1, \ldots, v_k\}$ ein Orthonormalsystem (nicht notwendig eine komplette Basis!) für $(V, < \, , \, >)$, so gilt für $v \in V$
$$\sum_{i=1}^{k} | < v, v_i > |^2 \leq \|v\|^2.$$