V. große Rebel

Übungen zur linearen Algebra und analytischen Geometrie II
Übungsblatt 10

Aufgabe 1:
Sei $(V, < \, , \, >)$ ein endlichdimensionaler, unitärer Vektorraum, und $f : V \to V$ eine selbstadjungierte lineare Abbildung. Zeigen Sie:

a) $\max\{< f(v), v > \mid v \in V,\ \|v\| = 1\}$ ist der größte Eigenwert von f.

b) $\min\{< f(v), v > \mid v \in V,\ \|v\| = 1\}$ ist der kleinste Eigenwert von f.

Aufgabe 2:

a) Seien V und W endlichdimensionale euklidische Vektorräume, und $\varphi : V \to W$ sei linear. $\varphi^{ad} : W \to V$ sei die zu φ adjungierte Abbildung. Zeigen Sie:

   i) $\ker \varphi^{ad} = (\text{Bild } \varphi)^{\perp}$

   ii) $\text{rang } \varphi = \text{rang } \varphi^{ad}$

   iii) $\text{Bild } \varphi^{ad} = (\ker \varphi)^{\perp}$.

b) $\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4$ seien mit dem kanonischen Skalarprodukt versehen.
$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$ sei gegeben durch:
$\varphi(x_1, x_2, x_3) = (-x_1 + 2x_2 + 3x_3, x_2 - 2x_3, -x_1 + 3x_2 + x_3, -2x_1 + 5x_2 + 4x_3)$.
Bestimmen Sie eine Basis von $\ker \varphi^{ad}$.

Aufgabe 3:
Bestimmen Sie die Signatur der hermitschen Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1+i & 5 \\ 1-i & 2 & i \\ 5 & -i & 7 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{C}).$$

Aufgabe 4:
Sei V ein euklidischer Vektorraum. Zeigen Sie:
$f : V \to V$ ist Orthogonalprojektion auf einem Unterraum $U \Leftrightarrow f$ ist idempotent und selbstadjungiert.