Prof. Dr. G. Rosenberger
V. große Rebel

Abgabe: Mo, 27.06.2005, 14h

Übungen zur linearen Algebra und analytischen Geometrie II
Übungsblatt 11

Aufgabe 1:
Gegeben sind die Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie für $k = 1, 2, 3$ eine Vollrangfaktorisierung $A_k = B_k C_k$ derart, dass für die Matrix C_k gilt: In den ersten r_k Spalten von C_k steht die $r_k \times r_k$ -Einheitsmatrix (mit $r_k = \text{Rang } A_k$).

b) Bestimmen Sie die Moore-Penrose-Inverse A_k^- von A_k.

c) Betrachten Sie für $k = 1, 2, 3$ die linearen Gleichungssysteme $A_k x = b_k$, mit

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_2 = b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

und bestimmen Sie den Vektor $x_0^{(k)}$, der die folgenden beiden Bedingungen erfüllt:

(i) $||b_k - A_k x|| \geq ||b_k - A_k x_0^{(k)}||$ für alle $x \in V$ (mit $V = \mathbb{R}^3$ bzw. $V = \mathbb{R}^2$).

(ii) Ist $x \in V \setminus \{x_0^{(k)}\}$ mit $||b_k - A_k x|| = ||b_k - A_k x_0^{(k)}||$, so gilt $||x|| > ||x_0^{(k)}||$.

d) Bestimmen Sie $X_k = \{x \in V \ : \ ||b_k - A_k x|| = ||b_k - A_k x_0^{(k)}||\}$.

Aufgabe 2:
Bestimmen Sie die Moore-Penrose-Inverse A^- und B^- von

$$A := \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \quad \text{und} \quad B := \begin{pmatrix} 0 & & \lambda_1 \\ & \iddots & \\ \lambda_n & & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}).$$

Aufgabe 3:

a) Bestimmen Sie eine Lösungsnäherung des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b) Lösen Sie a) graphisch.

Aufgabe 4: vgl. Satz (4.12)
Sei $A \in \mathrm{M}(m \times n, K)$ mit rang $A \geq 1$ und $A = BC$ eine Vollrangfaktorisierung von A. Dann ist B^*AC^* invertierbar.
Zeigen Sie die Moore-Penrose-Bedingungen (1) - (4) für $A^- = C^*(B^*AC^*)^{-1}B^*$.