Prof. Dr. G. Rosenberger
V. große Rebel

Abgabe: Mo, 18.07.2005, 14h

Übungen zur linearen Algebra und analytischen Geometrie II
Wiederholungsblatt 14

Aufgabe 1:
Sind die folgenden beiden Matrizen ähnlich?

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 \\ 0 & -19 & -25 \\ 0 & 16 & 21 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad N = \begin{pmatrix} -19 & -16 & -5 \\ 25 & 21 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2:

a) Bestimmen Sie M^{100} und N^{100} für

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

b) Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrizen M und N und deren Vielfachheiten. Sind diese Matrizen diagonalisierbar?

Aufgabe 3:

a) Entscheiden Sie, für welche $t \in \mathbb{R}$ die Matrix $A_t \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ in Jordansche Normalform transformiert werden kann, und bestimmen Sie diese Jordansche Normalform in Abhängigkeit von der Variablen t.

$$A_t = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & t \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Zeigen Sie: Ist eine Matrix $B \in \mathrm{M}_n(K)$ in Jordansche Normalform transformierbar, so auch B^2.

Aufgabe 4:
Seien $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_1 & \ldots & x_1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{pmatrix}$$

ist genau dann positiv definit, wenn $0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ gilt.

Aufgabe 5:
Beweisen oder widerlegen Sie:

a) Ist λ ein Eigenwert einer invertierbaren Matrix $A \in \mathrm{M}_n(K)$, so ist $\lambda \neq 0$ und λ^{-1} ist ein Eigenwert von A^{-1}.

b) Die obere Dreiecksmatrix

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

hat die Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

c) Das charakteristische Polynom der Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \ldots & -\alpha_{n-1} \end{pmatrix}$$

ist $\chi(t) = (\alpha_0 + \alpha_1 t + \ldots + \alpha_{n-1}t^{n-1} + t^n) \cdot (-1)^n$.

d) Die Ableitung $D(f) := f'$ definiert einen Endomorphismus $D \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}[t])$, der genau einen Eigenwert besitzt.

Aufgabe 6: –streiche Wiederholung!
Bezüglich der Standardbasis des $\mathbb{R}^3$ seien zwei quadratische Formen p, q auf $\mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$p(x_1, x_2, x_3) := x_1^2 + 2x_2^2 + 6x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 6x_2x_3$$

$$q(x_1, x_2, x_3) := 5x_1^2 + 12x_2^2 + 35x_3^2 - 18x_1x_2 + 28x_1x_3 - 42x_2x_3.$$

Man verifiziere, dass p positiv definit ist und bestimme eine Basis des $\mathbb{R}^3$, die p und q simultan diagonalisiert.

Aufgabe 7:
Es seien $g_1, g_2, g_3 : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$g_1(t) = t, \quad g_2(t) = 1 - t, \quad g_3(t) = t^2.$$

Der $\mathbb{R}$-Vektorraum $V := \mathrm{lin}\{g_1, g_2, g_3\}$ sei mit dem Skalarprodukt $< f, h >= \int_{-1}^{1} f(x)h(x)dx$ für alle $f, h \in V$ versehen.
Wenden Sie auf (g_1, g_2, g_3) das Gram-Schmidt-Verfahren an.

Aufgabe 8:
Es seien

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(3 \times 4; \mathbb{R}), \; b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie das Moore-Penrose-Inverse A^- von A.

b) Ist das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ lösbar?

c) Berechnen Sie den Abstand des Spaltenraumes von A zu b bezüglich des Standardskalrprodukts von $\mathbb{R}^3$