Prof. Dr. M. Voit

SS 2005

Stochastik I

Blatt 4

Abgabetermin: Freitag, 06. Mai 2005, in die Briefkästen im Foyer

Wiederholen Sie folgende Begriffe:
Unabhängigkeit von Mengensystemen, Produktexperimente, Modellierung gestufter Experimente, Polyasches Urnenmodell, Hypergeometrische Verteilung.

Aufgabe 1

Ein Artikel wird in Massenproduktion von n Maschinen hergestellt, wobei die i-te Maschine mit Wahrscheinlichkeit $p_i \in]0,1[$ ein defektes Teil produziert und diese Maschine einen Anteil $c_i \in]0,1[$ an der Gesamtproduktion hat ($i = 1,\ldots,n$ mit $c_1 + c_2 + \ldots + c_n = 1$).
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit,

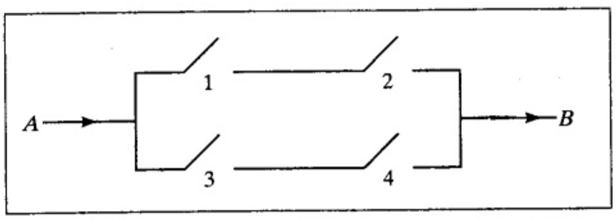
a) dass ein aus der Gesamtproduktion zufällig herausgegriffenes Teil defekt ist;

b) dass ein defektes Teil der Gesamtproduktion von der ersten Maschine stammt.

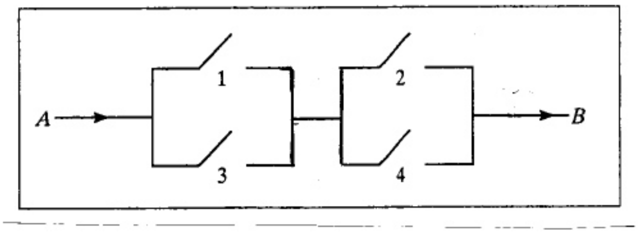
Aufgabe 2

In einer elektrischen Schaltung sind die vorhandenen Schalter unabhängig voneinander mit Wahrscheinlichkeit $p = 0,5$ geschlossen bzw. offen.
Modellieren Sie in den folgenden Fällen das Experiment auf einem geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum, und bestimmen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit, dass ein Strom von A nach B fließen kann:

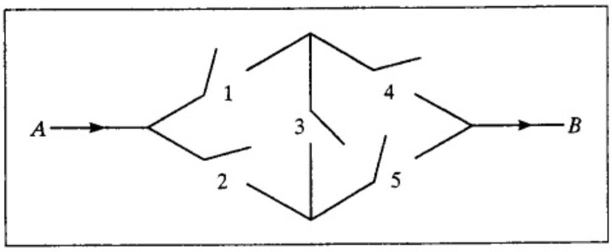
a)



b)



c)



(Tipp: zu c): Formel von der totalen Wahrscheinlichkeit auf mittleren Schalter anwenden!).

Aufgabe 3

Betrachten Sie das Polyasche Urnenmodell mit anfangs $w \in \mathbb{N}$ weißen und $s \in \mathbb{N}$ schwarzen Kugeln. Man ersetzt nun wie in der Vorlesung nach jeder Ziehung die gezogene Kugel durch $c+1$ Kugeln der gleichen Farbe mit $c \in \{-1, 0, 1, 2, \ldots\}$. Es werden $n \in \mathbb{N}$ Ziehungen durchgeführt.

a) Zeigen Sie, dass für alle Permutationen π von $\{1, \ldots, n\}$ und alle $x_1, \ldots, x_n \in \{s, w\}$
P (Für $i = 1, \ldots, n$ ist x_i die Farbe der i-ten Ziehung)
$= P$ (Für $i = 1, \ldots, n$ ist $x_{\pi(i)}$ die Farbe der i-ten Ziehung).

b) Für $c = 1,\ s = 10$ und $w = 15$ bestimme man die Wahrscheinlichkeit, dass bei der elften Ziehung eine schwarze Kugel gezogen wird.

c) Für $c = -1,\ s = 10$ und $w = 15$ bestimme man die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass bei der zehnten Ziehung eine schwarze Kugel gezogen wird unter der Bedingung, dass bei der elften ebenfalls eine schwarze Kugel gezogen wird.

Aufgabe 4 Die verallgemeinerte hypergeometrische Verteilung

Für $s, w \in \mathbb{R},\ s, w > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $n \leq s + w$ ist die **verallgemeinerte** hypergeometrische Verteilung $H_{s,w;n}$ definiert als die Verteilung auf $\Omega = \{0, 1, \ldots, n\}$ mit Zähldichte

$$f_{s,w;n}(k) := \binom{s}{k}\binom{w}{n-k} \Big/ \binom{s+w}{n}.$$

(Dabei ist $\binom{s}{k} := \frac{s(s-1)\ldots(s-k+1)}{k!}$ für $k \in \mathbb{N}_0,\ s \in \mathbb{C}$).
Zeigen Sie, das $f_{s,w;n}$ tatsächlich eine Zähldichte ist.
(Tipp: Die Aussage ist für einen Spezialfall bekannt!).

Aufgabe 5

Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $n \in \mathbb{N}$.
Zeigen Sie:

a) Sind $C_1, \ldots, C_n \in \mathcal{A}$ unabhängig, so ist

$$\mathcal{D} := \{A \in \mathcal{A} : P(A \cap C_1 \cap \ldots \cap C_n) = P(A)P(C_1) \ldots P(C_n)\}$$

ein Dynkin-System.

b) Ist $1 \leq k < n$, und bilden $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_n \subset \mathcal{A}$ eine unabhängige Familie $\cap$-abgeschlossener Mengensysteme, so sind $\mathcal{A}_1 := \sigma(\mathcal{C}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{C}_k)$ und $\mathcal{A}_2 := \sigma(\mathcal{C}_{k+1} \cup \ldots \cup \mathcal{C}_n)$ unabhängig.
(**Tipp:** Wenden Sie Satz 2.8 an auf
$\mathcal{A}_1 = \sigma(\{A_1 \cap \ldots \cap A_k : A_1 \in \mathcal{C}_1, \ldots, A_k \in \mathcal{C}_k\})$ und $\mathcal{A}_2$ entsprechend).

Aufgabe 6* **Die Eulersche φ-Funktion**

Für $n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$, sei $\varphi(n)$ die Anzahl der Zahlen aus $\Omega := \{1, \ldots, n\}$, die zu n teilerfremd sind.
P sei die Gleichverteilung auf Ω, und $p_1, \ldots, p_r$ seien die Primteiler von n.
Zeigen Sie:

a) Die Mengen $(\{p_i, 2p_i, \ldots, \frac{n}{p_i}p_i\})_{i=1,\ldots,r}$ sind unabhängig.

b) $\varphi(n) = n(1 - \frac{1}{p_1})(1 - \frac{1}{p_2}) \ldots (1 - \frac{1}{p_r})$.