Prof. Dr. M. Voit SS 2005

Stochastik I

Blatt 8

Abgabetermin: Freitag, 03. Juni 2005, in die Briefkästen im Foyer

Wiederholen Sie folgende Begriffe:
Lebesgue-Maß; Integrale von Treppenfunktionen und L^1-Funktionen; Eigenschaften von Integralen; Auswertung von Integralen bei diskreten Maßen und bei Maßen mit Lebesgue-Dichten.

Aufgabe 1

Es seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige, $\mathbb{R}$-wertige Zufallsvariable, die alle auf $[0,1]$ gleichverteilt sind.

a) Begründen Sie, dass $Y_n := max(X_1, \ldots, X_n)$ eine Zufallsvariable ist;

b) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion F_n von Y_n;

c) Bestimmen Sie die Lebesgue-Dichte f_n von Y_n.

Aufgabe 2 Normalverteilungen

a) Es seien X eine $\mathbb{R}$-wertige, $N(\mu, \sigma^2)$-verteilte Zufallsvariable und $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$. Zeigen Sie, dass $aX + b$ ebenfalls normalverteilt ist, und bestimmen Sie die passenden Parameter.

b) Es sei X eine $N(1,2)$-verteilte Zufallsvariable. Bestimmen Sie anhand der rückseitigen Tabelle $P(X \in [0,2])$.
(Achtung: Rückseitige Tabelle bezieht sich auf $N(0,1)$!)

c) Für eine $N(0,1)$-verteilte Zufallsvariable X bestimme man die Dichte der $[0,\infty[$-wertigen Zufallsvariablen X^2.

Aufgabe 3

Es seien $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ Zufallsvariable mit

$$P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = Y(\omega)\}) = 1.$$

Überprüfen Sie, ob X und Y dieselben Verteilungen haben!

Aufgabe 4

Eine Borelmenge $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ sei mit der Borel σ-Algebra $\mathcal{B}(A)$ versehen. Es sei P_A ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(A, \mathcal{B}(A))$. Zeigen Sie, dass

$$P(B) := P_A(A \cap B),\ \ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$$

ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ definiert. Inwieweit ist die Binomialverteilung $B_{n,p}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathbb{R}$?

Aufgabe 5

Es sei P die Gleichverteilung auf einer der folgenden Teilmengen A von $(\Omega, \mathcal{A}) := (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$. Entscheiden sie jeweils mit kurzer Begründung, ob die Koordinatenprojektionen $X_i : \Omega \to \mathbb{R}, (x_1, x_2) \mapsto x_i,\ \ (i = 1, 2)$ unabhängig sind:

a) $A = [-1, 1]^2$;

b) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ |x| + |y| \leq 1\}$.

c) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Wie steht es mit der Unabhängigkeit von $\frac{1}{\sqrt{2}}(X_1 + X_2)$ und $\frac{1}{2}(X_1 - X_2)$ in obigen Fällen?

Klausurtermin:

Freitag, 15.07.2005, 14.00 - 16.00 Uhr, M/E29