Prof. Dr. M. Voit   SS 2005

Stochastik I

Blatt 9

Abgabetermin: Freitag, 10. Juni 2005, in die Briefkästen im Foyer

Aufgabe 1

Die Lebensdauer X eines Bauteils sei geometrisch verteilt auf $\mathbb{N}$ mit Index $p \in]0,1[$.

a) Bestimmen Sie die Erzeugendenfunktion $g_X, E(X)$, $Var(X)$ sowie einen Median.

b) Beim ersten Ausfall des Bauteils wird das Bauteil sofort durch ein baugleiches Teil ersetzt, dessen Lebenserwartung wieder geometrisch verteilt mit Index p und unabhängig von der Lebensdauer des ersten Bauteils sei.
Bestimmen Sie für den Zeitpunkt Y des Ausfalls des zweiten Teils $E(Y), Var(Y)$ und die Verteilung von Y.

Aufgabe 2

Im Polyaschen Urnenmodell mit anfangs s schwarzen und w weißen Kugeln wird n-mal eine Kugel gezogen mit $n \leq s + w$. Nach jeder Ziehung wird dabei die gezogene Kugel durch $(c + 1)$ Kugeln der gleiche Farbe ersetzt.
Dabei ist $c \geq -1$ ein Parameter.

a) Zeigen Sie, dass für $i = 1, \dots, n$ die Zufallsvariablen

$$X_i := \begin{cases} 1 & \textit{falls i-te Kugel schwarz} \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}$$

die gleiche Verteilung haben (vgl. § 2 der Vorlesung).

b) Bestimmen Sie den Erwartungswert der Anzahl der schwarzen Kugeln unter den n gezogenen Kugeln.

c) Bestimmen Sie den Erwartungswert einer $H_{s,w,n}$-hypergeometrisch verteilten Zufallsvariablen.

Aufgabe 3

Die Länge X eines zufällig auf der Straße gefundenen Blattes eines Baumes sei Beta-verteilt mit der Dichtefunktion

$$f(x) = \begin{cases} cx(1-x) & x \in [0,1] \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}$$

a) Bestimmen Sie c so, dass f die Dichte eines Wahrscheinlichkeitsmaßes ist.

b) Bestimmen Sie $E(X), Var(X)$ sowie den Median von X;

c) Die Fläche Y eines Blattes der Länge X sei $Y = \frac{1}{2}X^2$.
Bestimmen Sie die Dichte der Fläche Y eines zufälligen Blattes.
(Tipp: § 6.2 aus der Vorlesung!)

Aufgabe 4

Für eine mit den Parametern $a, v > 0$ Gamma-verteilte Zufallsvariable X bestimme man $E(X)$ (vgl. Aufgabe 4/Blatt 7).

Aufgabe 5 Cauchy-Verteilungen

a) Überprüfen Sie, ob für $\alpha > 0$

$$f_\alpha(x) = \frac{\alpha}{\pi(\alpha^2 + x^2)} \quad (x \in \mathbb{R})$$

die Lebesgue-Dichte eines Wahrscheinlichkeitsmaßes P_α auf $\mathbb{R}$ ist.

b) Überprüfen Sie, ob für eine P_α-verteilte Zufallsvariable X der Erwartungswert $E(X)$ existiert.

Aufgabe 6

Ein spezieller Würfel ergibt bei einem Wurf die Augenzahlen $1, 2$ oder 3 mit Wahrscheinlichkeit $1/3$. Dieser Würfel wird zuerst einmal geworfen.
Anschließend wird unabhängig davon ein Standardwürfel so oft geworfen, wie die Augenzahl beim ersten Wurf war.

a) Modellieren Sie dieses zusammengesetzte Experiment auf einem passenden Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

b) Bestimmen Sie die Verteilung und den Erwartungswert der Augensumme, die beim evtl. mehrmaligen Wurf des Standardwürfels auftritt.