Prof. Dr. M. Voit SS 2005

Stochastik I

Blatt 10

Abgabetermin: Freitag, 17. Juni 2005, in die Briefkästen im Foyer

Aufgabe 1

In einer Stichprobe mit 100 Studenten werden Körpergröße (auf 10 cm gerundet) und Schuhgröße wie folgt ermittelt:

	41	**42**	**43**	**44**
160	6	4	1	1
170	3	14	12	4
180	1	10	20	5
190	0	4	5	10

Bestimmen Sie die Verteilung der Schuhgröße sowie den Korrelationskoeffizienten zwischen Körper- und Schuhgröße.

Aufgabe 2

Zwei Studenten gehen zwischen 13.00 und 14.00 Uhr zu einem zufälligen gleichverteilten Zeitpunkt unabhängig voneinander in die Mensa. Sie beschließen, jeweils genau 10 Minuten am Mensaeingang aufeinander zu warten.
Bestimmen Sie mit geometrischen Mitteln die Wahrscheinlichkeit für ein Zusammentreffen am Mensaeingang.

Aufgabe 3 Numerische Integration mit Monte-Carlo-Methoden

Für $d \in \mathbb{N}$ und eine stetige Funktion

$$f : [0,1]^d \to [0,1]$$

soll $I := \int_{[0,1]^d} f(x)\, d\lambda^d(x)$ so gut wie möglich bestimmt werden.
Dazu wird angenommen, dass unabhängige, auf $[0,1]$ gleichverteilte Zufallsvariable $X_{n,i}$ $(n \in \mathbb{N}, i = 0, \dots, d)$ zur Verfügung stehen.

a) Zeigen Sie, dass für $n \in \mathbb{N}$

$$Z_n = \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad X_{n,0} \leq f(X_{n,1}, \ldots, X_{n,d}) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariable mit $E(Z_n) = I$ sind.

b) Begründen Sie durch Angabe passender Fehlerabschätzungen, dass für hinrechend große $n \in \mathbb{N}$ die Zufallsvariablen $S_n := 1/n(Z_1 + \ldots + Z_n)$ mit hoher Wahrscheinlichkeit gute Approximationen für I sind (Tipp: T-Ungleichung).

c) Wie groß ist für $d = 50$ die Zahl n in etwa zu wählen, um I mit Wahrscheinlichkeit mindestens $0,999$ bis auf 3 Stellen genau zu bestimmen.
Wie groß ist dabei der Gesamtrechenaufwand?

d)* Wie groß ist in etwa der Rechenaufwand, wenn Sie I für $d = 50$ mit Standardverfahren der Numerik approximieren wollen?

Aufgabe 4 **Der Approximationssatz von Weierstraß**

Es sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Für $n \in \mathbb{N}$ und $p \in [0,1]$ betrachte man eine $B_{n,p}$-verteilte Zufallsvariable $X_{n,p} : \Omega \to \{0, 1, \ldots, n\}$. Zeigen Sie:

a) Die Abbildung $B_n : [0,1] \to \mathbb{R},\ p \mapsto E(f(\frac{X_{n,p}}{n}))$ ist ein Polynom vom Grade $\leq n$, und es gilt
$\max\limits_{p \in I} \quad |B_n(p)| \leq \max\limits_{p \in I} |f(p)|$.

b) $P(|\frac{X_{n,p}}{n} - p| > \delta) \leq 1/4n\delta^2$ für $\delta > 0$.

c) $\lim\limits_{n \to \infty} \max\limits_{p \in I} |B_n(p) - f(p)| = 0$.
(Tipp: f ist gleichmäßig stetig).

Aufgabe 5

Es sei $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable mit stetiger Verteilungsfunktion F. Zeigen Sie, dass die Zufallsvariable $F \circ X : \Omega \to [0,1]$ auf $[0,1]$ gleichverteilt ist.