Prof. Dr. M. Voit SS 2005

Stochastik I

Blatt 11

Abgabetermin: Freitag, 24. Juni 2005, in die Briefkästen im Foyer

Aufgabe 1

Ein Würfel wird 6000-mal unabhängig geworfen. Bestimmen Sie mit der T-Ungleichung eine untere Schranke für die Wahrscheinlichkeit, dass die Eins zwischen 900-mal und 1100-mal geworfen wird.

Aufgabe 2

Sei P die Gleichverteilung auf dem Dreieck

$$\triangle := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x,y \geq 0;\ x+y \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Dann sind die Koordinatenprojektionen $X, Y : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $X(x,y) := x,\ Y(x,y) := y$ Zufallsvariable auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2), P)$.

a) Bestimmen Sie $E(X),\ E(Y),\ E(X \cdot Y)$ und $E(X|Y = y_0)$ für $y_0 \in [0,1]$.

b) Entscheiden Sie, ob X und Y unabhängig sind.

c) Bestimmen Sie die Verteilungen von X und Y sowie die gemeinsame Verteilung von X und X.

d) Bestimmen Sie die Verteilung von $X + Y$.

Aufgabe 3

Es sei P die Gleichverteilung auf dem Intervall $[1,3]$. Bestimmen Sie die Dichte von $P * P$.

Aufgabe 4

Es sei P die Gleichverteilung auf dem Intervall [0,1] und $Q := \frac{1}{3}\delta_0 + \frac{2}{3}\delta_2$.
Überlegen Sie sich, dass $P * Q$ eine Dichte hat, und bestimmen Sie diese.

Aufgabe 5

Es sei $(X_1, \ldots, X_d)$ ein $N(m, \Sigma)$-verteilter Zufallsvektor mit $m \in \mathbb{R}^d,\ \Sigma \in \mathbb{R}^{d \times d}$ symmetrisch, positiv definit. Zeigen Sie:

$$E(X_i) = m_i, \quad Kov(X_i, X_j) = \Sigma_{ij} \quad (i,j = 1, \ldots, n).$$

Aufgabe 6*

a) Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $Y : \Omega \to \{1, \ldots, n\}$ sowie $X_1, \ldots, X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ Zufallsvariable mit folgenden Eigenschaften:

   i) $X_1, \ldots, X_n$ sind integrierbar mit $E(X_1) = E(X_i)$ für $i = 1, \ldots, n$.

   ii) $X_1, \ldots, X_n$ und Y sind unabhängig.

   Zeigen Sie, dass $S : \Omega \to \mathbb{R},\ \omega \mapsto \sum_{i=1}^{Y(\omega)} X_i(\omega)$ eine Borel-meßbare Zufallsvariable ist mit $E(S) = E(Y)E(X_1)$.

b) Zur Zeit 0 enthalte eine Nährlösung $n \in \mathbb{N}$ einzellige Wesen. Zu jedem Zeitpunkt $k \in \mathbb{N}$ kann sich mit Wahrscheinlichkeit $p \in]0, 1[$ jede Zelle teilen. Die Zellteilung ist unabhängig vom Alter der Zelle und von der Anzahl der übrigen Zellen in der Nährlösung. Man berechne den Erwartungswert der Zellenzahl zur Zeit $k \in \mathbb{N}$.