Prof. Dr. M. Voit SS 2005

Stochastik I

Blatt 12

Abgabetermin: Freitag, 01. Juli 2005, in die Briefkästen im Foyer

Aufgabe 1 Beta-Verteilungen

Für $p, q > 0$ ist die Beta-Verteilung $\beta_{p,q}$ das Wahrscheinlichkeitsmaß auf $]0, 1[$ mit Dichte $f_{p,q}(x) = c_{p,q} \cdot (1 - x)^{p-1}\ x^{q-1}$.

a) Bestimmen Sie $c_{p,q}$ mithilfe der Gammafunktion.

b) Bestimmen Sie $E(X)$ und $Var(X)$ für eine $\beta_{p,q}$-verteilte Zufallsvariable.

Aufgabe 2

In einer Schachtel befindet sich anfangs eine schwarze Kugel. In jeder Ziehung wird eine Kugel gezogen, die Farbe notiert, und die Kugel zurückgelegt. **Zusätzlich** werden nach der n-ten Ziehung n **zusätzliche** weiße Kugeln in die Schachtel gelegt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass

a) in der n-ten Ziehung die schwarze Kugel gezogen wird;

b) bei unendlich vielen Ziehungen die schwarze Kugel unendlich oft gezogen wird.

Aufgabe 3

Betrachten Sie den Wahrscheinlichkeitsraum $([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), P)$ mit der Gleichverteilung P auf $[0, 1]$ sowie die Zufallsvariablen

$$X_{2^l+k} := \mathbf{1}_{[k2^{-l},(k+1)2^{-l}]} : [0, 1] \to \mathbb{R} \quad (l \in \mathbb{N},\ 0 \leq k \leq 2^l - 1).$$

Beachten Sie dabei, dass jedes $n \in \mathbb{N}$ eindeutig als $2^l + k$ darstellbar ist.

a) Skizzieren Sie die X_n für $n \in \mathbb{N}$ grob.

b) Zeigen Sie, dass $X_n \xrightarrow{\|\cdot\|_1} 0$ für $n \to \infty$ gilt.

c) Entscheiden Sie, ob die X_n stochastisch gegen 0 konvergieren.

d) Entscheiden Sie, ob die X_n fast sicher gegen 0 konvergieren.

Aufgabe 4

Es seien $X, Y : \Omega \to]0, \infty[$ unabhängige, $\mathbb{R}$-wertige Zufallsvariable mit Dichten f und g.
Zeigen Sie, dass $X \cdot Y$ eine Dichte hat, und bestimmen Sie diese Dichte.

Aufgabe 5 **Die Student-Verteilung t_n**

Für $n \in \mathbb{N}$ seien W, U reellwertige und unabhängige Zufallsvariable mit $P_W = N(0,1)$ und $P_U = \chi_n^2$.
Zeigen Sie, dass $T_n := \sqrt{n}\, W/\sqrt{U}$ eine fast sicher wohldefinierte reellwertige Zufallsvariable mit der Dichte

$$h_n(x) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2}) \cdot \sqrt{n\pi}} \cdot (1 + \frac{x^2}{n})^{-(n+1)/2} \quad (x \in \mathbb{R})$$

ist. Das Wahrscheinlichkeitsmaß $t_n \in M^1(\mathbb{R})$ mit Dichte h_n heißt t-Verteilung (oder Student-Verteilung) mit n Freiheitsgraden.
(**Anleitung:** Lemma 7.22 der Vorlesung!)

Aufgabe 6

Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ eine Folge von Mengen.
Zeigen Sie:

a) $\liminf\limits_n A_n = \{\omega \in \Omega : \ \omega \in A_n$ für alle bis auf höchstens endlich viele $n \in \mathbb{N}\}$.

b) $\mathbf{1}_{\liminf\limits_n A_n} = \liminf\limits_n \mathbf{1}_{A_n}$

Hinweise zur Klausur:

Termin: Freitag, 15.07.2005, 14.00 - 16.00 Uhr, M/E29

Zugelassene Hilfsmittel:

- Geheftetes, handgeschriebenes Skriptum sowie Unterlagen zu Übungen.
- Ein Lehrbuch sowie evtl. eine Formelsammlung.

Elektronische Hilfsmittel sind nicht zugelassen.