PROF. DR. K.F. SIBURG
DIPL.-MATH. I. BEDNAREK

FACHBEREICH MATHEMATIK
UNIVERSITÄT DORTMUND

2. Übungsblatt zu „Gewöhnliche Differentialgleichungen“ SS 2005, 14.4.2005

Das Übungsblatt beschäftigt sich mit ebenen linearen Differentialgleichungen. Wir wissen bereits, dass die Lösung des Anfangswertproblems

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) \\ x(0) &= x_0 \end{aligned} \right. \tag{1}$$

mit $x(t), x_0 \in \mathbb{R}^2$ und $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ gegeben ist durch

$$x(t) = e^{tA}x_0 := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!}\, x_0. \tag{2}$$

Im Folgenden sollen Sie die Grundzüge der Lösungstheorie ebener linearer Differentialgleichungen anhand von Leitfragen selbstständig entwickeln (bzw. wiederholen).

Aufgabe 4

(a) Lösen Sie (1) für den Fall, dass $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ eine Diagonalmatrix ist.

(b) Sei A jetzt keine Diagonalmatrix mehr, aber doch noch diagonalisierbar, d.h. es gibt ein $B \in GL(2, \mathbb{R})$, so dass $BAB^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ eine Diagonalmatrix ist. Wie sieht dann die Lösung von (1) aus?

(c) Verwenden Sie Ihre Ergebnisse, um die Differentialgleichung (1) für die drei Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -\alpha \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

mit $\alpha \in \{0, 1, 2\}$ zu lösen. Zeichnen Sie jeweils das Phasenraumporträt.

(d) Die Eigenwerte von A spielen offenbar für das Verhalten einer Lösung (2) eine entscheidende Rolle. Welche qualitativ unterschiedlichen Fälle können dabei auftreten? Skizzieren Sie die möglichen Phasenraumporträts und beschreiben Sie mit kurzen Worten das jeweilige Verhalten der Lösungen von (1).

Abgabe: Donnerstag, 21.4.2005, bis 12:00 Uhr, in die Briefkästen im Foyer.