Prof. Dr. K.F. Siburg
Dipl.-math. I. Bednarek

Fachbereich Mathematik
Universität Dortmund

3. Übungsblatt zu „Gewöhnliche Differentialgleichungen“
SS 2005, 19.4.2005

Aufgabe 5
Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 t \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \qquad \text{für } x \in \mathbb{R} \tag{1}$$

a) Bestimmen Sie die maximale Lösung des Anfangswertproblems!

b) Wie hängt das maximale Existenzintervall von der Wahl der Anfangsbedingungen ab?

Aufgabe 6
Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \dot{x} = x^{\frac{2}{3}} \\ x(0) = 0 \end{cases} \qquad \text{für } x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Zeigen Sie:
Auf jedem Intervall $[0, a]$ gibt es zwei analytische und unendlich viele C^∞-Lösungen.
Ist das ein Widerspruch zum Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf?

Aufgabe 7
Zeigen Sie, dass die Lösungen der Pendelgleichung

$$\ddot{x} + \sin x = 0$$

für $x \in \mathbb{R}$ immer auf ganz $\mathbb{R}$ existieren.

Aufgabe 8
Gegeben sei das Differentialgleichungssystem

$$\begin{cases} \dot{x} = -x^2 y - y^3 \\ \dot{y} = x^3 + x y^2 \end{cases} \quad . \tag{3}$$

a) Rechnen Sie das System in Polarkoordinaten um!

b) Bestimmen Sie ein Integral und zeichnen Sie das Phasenportrait im x-y-Koordinatensystem!

Aufgabe 10

Wir betrachten die Differentialgleichung $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ für $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

a) mit $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

b) mit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$.

- Bestimmen Sie jeweils die Lösung der Differentialgleichung mit $\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$!
- Veranschaulichen Sie sich das Richtungsfeld der Differentialgleichung wie folgt: Zeichnen Sie in ein x-y-Koordinatensystem zunächst die Punkte ein, in denen $\dot{x} = 0$ bzw. $\dot{y} = 0$ gilt. Die so entstandenen Kurven heißen Nullklinen. Die beiden Nullklinen teilen die x-y-Ebene in vier Gebiete.
  Überlegen Sie sich, welche Vorzeichen die einzelnen Komponenten des Vektorfeldes $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ in diesen Gebieten haben.
- Skizzieren Sie das Phasenportrait für beide Systeme! Nutzen Sie dazu die Informationen, die Sie aus den beiden vorherigen Aufgabenteilen gewonnen haben.

Abgabe: Donnerstag, 28.4.2005, bis 12:00 Uhr, in die Briefkästen im Foyer.