Prof. Dr. K.F. Siburg
Dipl.-math. I. Bednarek

Fachbereich Mathematik
Universität Dortmund

4. Übungsblatt zu „Gewöhnliche Differentialgleichungen“
SS 2005, 26.4.2005

Aufgabe 11: Das Keplerproblem
Das Keplerproblem wird durch die Differentialgleichung

(1) $$\ddot{x} = -\frac{x}{|x|^3}$$

für $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ beschrieben.

a) Schreiben Sie die Differentialgleichung mit Hilfe der Transformation $y = \dot{x}$ um in ein System erster Ordnung.

b) Zeigen Sie, dass das Keplerproblem (1) folgende Integrale besitzt:

(i) die Energie $H(x, y) = \frac{1}{2}|y|^2 - \frac{1}{|x|}$

(ii) den Drehimpulsvektor $L = x \times y$

(iii) den Lenz-Runge-Vektor $C = y \times L - \frac{x}{|x|}$

Beachten Sie dabei die Ableitungsregel für das Kreuzprodukt:

$$\frac{d}{dt}(a \times b) = \dot{a} \times b + a \times \dot{b}.$$

Folglich besitzt das 6-dimensionale Keplerproblem 1+3+3=7 Integrale—wie kann das sein?

c) Zeigen Sie mit Hilfe der Drehimpulserhaltung (Aufgabenteil b) (ii)):

(i) Die Bewegung im Keplerproblem findet in einer festen Ebene statt, auf der der Drehimpulsvektor senkrecht steht.

(ii) Der Bahnstrahl einer geschlossenen Bahn des Keplerproblems überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen (*2. Keplersches Gesetz*).

Aufgabe 12
Gegeben seien die Differentialgleichungen

(2) $$\begin{cases} \dot{x} = 2y(z-1) \\ \dot{y} = -x(z-1) \\ \dot{z} = -z^3 \end{cases}$$

und

$$(3) \qquad \begin{cases} \dot{x} = -x - xy^2 - x^3 \\ \dot{y} = -7y + 3x^2y - 2yz^2 - y^3 \\ \dot{z} = -5z + y^2z - z^3 \end{cases} .$$

Bestimmen Sie mit dem Ansatz

$$G(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2$$

eine Liapunov-Funktion für beide Differentialgleichungen. Finden Sie ein Integral?

Aufgabe 13
Gegeben sei die Differentialgleichung

$$(4) \qquad \begin{cases} \dot{x} = x \cos y - 2y \cos y \\ \dot{y} = -3x^3 + 6x^2y \end{cases}$$

Bestimmen Sie mit Hilfe eines Separationsansatzes

$$G(x, y) = f(x) + g(y)$$

ein Integral für diese Differentialgleichung.

Abgabe: Mittwoch, 4.5.2005, bis 16:00 Uhr, in die Briefkästen im Foyer.