Prof. Dr. K.F. Siburg
Dipl.-math. I. Bednarek

Fachbereich Mathematik
Universität Dortmund

5. Übungsblatt zu „Gewöhnliche Differentialgleichungen“ SS 2005, 4.5.2005

Aufgabe 14

a) Es sei $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ von der Form

$$D = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie:

$$e^{tD} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t & \dots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & t \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Es sei

$$A := \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie e^{tA}!

Aufgabe 15
Gegeben sei die Differentialgleichung

$$\begin{cases} \dot{x} = y + a(x^2+y^2)y \\ \dot{y} = -x + a(x^2+y^2)x \end{cases} \tag{1}$$

Zeigen Sie:
$a < 0 \Rightarrow$ Der Nullpunkt ist asymptotisch stabile Ruhelage.
$a = 0 \Rightarrow$ Der Nullpunkt ist stabil, aber nicht asymptotisch stabil.
$a > 0 \Rightarrow$ Der Nullpunkt ist instabile Ruhelage.

Aufgabe 16
Gegeben seien die beiden Differentialgleichungen

$$(2) \qquad \begin{cases} \dot{x} = -x - xy \\ \dot{y} = x + x^2 \end{cases}$$

und

$$(3) \qquad \begin{cases} \dot{x} = -y - x^3 - xy^2 \\ \dot{y} = x - y^3 - x^2 y \end{cases}$$

a) Transformieren Sie die beiden Gleichungen mit Hilfe von Polarkoordinaten.

b) Untersuchen Sie die Nulllösung auf (asymptotische) Stabilität.

Aufgabe 17
Das folgende Beispiel zeigt, warum in der Definition der asymptotischen Stabilität die Stabilität explizit gefordert wird:

Gegeben sei die folgende Differentialgleichung

$$(4) \qquad \begin{cases} \dot{x} = x(1 - \sqrt{x^2 + y^2}) - y(\sqrt{x^2 + y^2} - x) \\ \dot{y} = y(1 - \sqrt{x^2 + y^2}) + x(\sqrt{x^2 + y^2} - x) \end{cases}$$

a) Transformieren Sie die Gleichung mit Hilfe von Polarkoordinaten.

b) Zeigen Sie: Die konstante Lösung $(1, 0)^T$ ist instabil.

c) Es sei $(x(t), y(t)) \neq (0, 0)^T$ eine Lösung von (4). Zeigen Sie:

$$\lim_{t \to \infty} (x(t), y(t)) = (1, 0)^T$$

(„Alle Lösungen laufen in $(1, 0)^T$ hinein.“)

d) Skizzieren Sie das Phasenportrait.

Abgabe: Freitag, 13.5.2005, bis 16:00 Uhr, in die Briefkästen im Foyer.