Prof. Dr. K.F. Siburg
Dipl.-math. I. Bednarek

Fachbereich Mathematik
Universität Dortmund

6. Übungsblatt zu „Gewöhnliche Differentialgleichungen“
SS 2005, 11.5.2005

Aufgabe 18
Bearbeiten Sie für unten stehende autonome Systeme jeweils folgende Teilaufgaben:

a) Bestimmen Sie alle Nullklinen und stationären Punkte.

b) Bestimmen Sie, sofern möglich, die Typen der Ruhelagen durch Linearisierung.

c) Skizzieren Sie (in verschiedenen Skizzen) Richtungsfeld und Phasenportrait.

d) Bestimmen Sie anhand des Phasenportraits alle Symmetrieachsen.

e) Beweisen Sie Ihre in d) aufgestellten Behauptungen.

f) Finden Sie für das System (2) eine Hamiltonfunktion.

g) Können Sie nun alle Ruhelagen charakterisieren?

(1) $$\dot{x} = (1-x)(y^2-4), \quad \dot{y} = xy$$

(2) $$\dot{x} = 2xy, \quad \dot{y} = 4 - x^2 - y^2$$

(3) $$\dot{x} = -y(4-x^2), \quad \dot{y} = x - y^3$$

(4) $$\dot{x} = (y^2-4)(x+1), \quad \dot{y} = (x^2-4)(y+1)$$

Aufgabe 19
Gegeben sei die folgende Differentialgleichung

$$\begin{cases} \dot{x} = -3x - x^2 + 3xy \\ \dot{y} = -2x + 3y - x^2 + 3xy \end{cases} \tag{5}$$

a) Skizzieren Sie Richtungsfeld und Phasenportrait.

b) Bestimmen Sie einen integrierenden Faktor m, der von $x - y$ abhängt.

c) Geben Sie eine Hamiltonfunktion für das mit m modifizierte System und ein Integral für das System (5) an.

Aufgabe 20
Gegeben sei die Differentialgleichung

$$(6) \qquad \begin{cases} \dot{x} = -x + 2y^3 - 2y^4 \\ \dot{y} = -x - y + xy \end{cases}$$

Bestimmen Sie mit Hilfe des Ansatzes $G(x, y) = ax^{2m} + by^{2n}$ eine Liapunov-Funktion G und untersuchen Sie den Nullpunkt auf (asymptotische) Stabilität.

Aufgabe 21
Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ so, dass die symmetrische Matrix $A + A^T$ nur negative Eigenwerte hat.
Zeigen Sie:
0 ist asymptotisch stabiler stationärer Punkt der linearen Differentialgleichung $\dot{x} = Ax$.
Hinweis: Verwenden Sie den Stabilitätssatz von Liapunov.

Aufgabe 22
Gegeben sei die Differentialgleichung

$$(7) \qquad \begin{cases} \dot{x} = 2y(z - 1) \\ \dot{y} = -x(z - 1) \\ \dot{z} = -z^3 \end{cases}$$

Untersuchen Sie den Nullpunkt auf (asymptotische) Stabilität.

Abgabe: Mittwoch, 25.5.2005, bis 12:00 Uhr, in die Briefkästen im Foyer.