

## 7. Übungsblatt zu „Gewöhnliche Differentialgleichungen“ SS 2005, 24.5.2005

### Aufgabe 22: Instabilitätssatz von Liapunov

Es sei die Differentialgleichung  $\dot{x} = f(x)$  mit  $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  mit  $f(p_0) = 0$  gegeben.

- a) Es gebe ein  $g \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  und eine Umgebung  $U$  von  $p_0$  mit:
- (i)  $g$  hat in  $p_0$  ein striktes lokales Minimum.
  - (ii) Für alle  $x \in U \setminus \{p_0\}$  gilt:  $\langle \nabla g(x), f(x) \rangle > 0$
- Zeigen Sie:  $p_0$  ist instabile Ruhelage.
- b) Es gebe eine Liapunovfunktion  $G$ , die  $p_0$  als striktes lokales Maximum hat und so dass nahe  $p_0$  gilt:  $\frac{d}{dt}G(\varphi^t(x)) \big|_{t=0} < 0$  ( $x \neq p_0$ )
- Zeigen Sie:  $p_0$  ist instabile Ruhelage.
- c) Folgern Sie:
- Ist  $\dot{x} = -\nabla F(x)$  ein Gradientensystem, so sind alle isolierten Maxima von  $F$  instabile Ruhelagen der Differentialgleichung.

### Aufgabe 23

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$(1) \quad \begin{cases} \dot{x} = 4x^3(2 - e^{x^4} \cos y) \\ \dot{y} = e^{x^4} \sin y \end{cases}$$

- a) Zeigen Sie: Das System ist ein Gradientensystem.
- b) Untersuchen Sie den Nullpunkt auf (asymptotische) Stabilität.

### Aufgabe 24: Etwas Epidemiologie

In einer Population mit  $N$  Individuen gebe es genau zwei Klassen von Personen: Die gesunden, aber ansteckbaren, und die bereits erkrankten, also infektiösen, Menschen.  $\beta \in (0, 1]$  bezeichne die mittlere Wahrscheinlichkeit, dass ein kranker Mensch einen gesunden Menschen pro Zeiteinheit ansteckt. Die Krankenzuwachsrates bei  $g$  Gesunden und  $k$  Kranken ist also  $\beta g k$ . Zum Zeitpunkt  $t = 0$  gebe es  $k_0$  infektiöse Personen mit  $0 < k_0 \ll N$ .

- a) Stellen Sie das zugehörige Anfangswertproblem (die sogenannte „logistische Gleichung“) für das gegebene Modell auf und lösen Sie sie.
- b) Gibt es Hoffnung, gesund zu bleiben? Bei welcher Anzahl von Kranken ist die Epidemie auf ihrem Höhepunkt?
- c) Erweitern Sie das Modell in folgender Weise:  
 $\alpha \in [0, 1]$  sei die mittlere Genesungswahrscheinlichkeit eines Kranken pro Zeiteinheit.  
(Tip: Rückführung auf das alte Modell)
- d) Diskutieren Sie den Verlauf der Epidemie in Abhängigkeit von  $\alpha, \beta$  und  $k_0$ .

**Abgabe:** Donnerstag, 2.6.2005, bis 12:00 Uhr, in die Briefkästen im Foyer.