Prof. Dr. K.F. Siburg
Dipl.-math. I. Bednarek

Fachbereich Mathematik
Universität Dortmund

8. Übungsblatt zu „Gewöhnliche Differentialgleichungen“
SS 2005, 31.5.2005

Wir betrachten auf diesem Zettel das Problem zweier konkurrierender Arten. Das heißt, es gebe Populationen zweier Spezies x und y, die etwa um gemeinsames Futter oder Lebensraum kämpfen. Die zugehörigen Wachstumsgleichungen haben dann die Form

$$(1) \qquad \begin{cases} \dot{x} = M(x,y)x \\ \dot{y} = N(x,y)y \end{cases}$$

Dabei seien die Wachstumsraten $M, N \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Wir interessieren uns für $x, y \geq 0$. Das System erfülle die folgenden drei Bedingungen:

(i) $\frac{\partial M}{\partial y} < 0$ und $\frac{\partial N}{\partial x} < 0$

(ii) $\exists K > 0 : (x \geq K \vee y \geq K) \Rightarrow (M(x,y) \leq 0 \wedge N(x,y) \leq 0)$

(iii) $\exists a > 0 : (x < a \Rightarrow M(x,0) > 0) \wedge (x > a \Rightarrow M(x,0) < 0)$ und
$\exists b > 0 : (y < b \Rightarrow N(0,y) > 0) \wedge (y > b \Rightarrow N(0,y) < 0)$

Aufgabe 25
Gegeben sei die Differentialgleichung

$$(2) \qquad \begin{cases} \dot{x} = x(2-x-y) \\ \dot{y} = y(3-2x-y) \end{cases}$$

a) Zeigen Sie: Die Differentialgleichung erfülllt die Bedingungen (i)-(iii) für das Modell konkurrierender Arten.

b) Skizzieren Sie das Richtungsfeld und Phasenraumportrait der Differentialgleichung im Quadranten $x \geq 0, y \geq 0$.

c) Untersuchen Sie die Ruhelagen auf Stabilität.

d) Begründen Sie, in welchem Sinne es mathematisch möglich, aber doch sehr unwahrscheinlich ist, dass beide Arten überleben.

Aufgabe 26

a) Interpretieren Sie die Bedingungen (i)-(iii).

b) Zeigen Sie:

- Die Menge $\mu = M^{-1}(0)$ schneidet jede vertikale Linie $\{x\} \times \mathbb{R}$ genau einmal, falls $0 \leq x \leq a$, und nicht, falls $x > a$.
- Die Menge $\nu = N^{-1}(0)$ schneidet jede horizontale Linie $\mathbb{R} \times \{y\}$ genau einmal, falls $0 \leq y \leq b$, und nicht, falls $y > b$.

- Es gibt ein $f \in C^1([0,a],\mathbb{R})$, so dass μ der Graph von f ist.
- Es gibt ein $g \in C^1([0,b],\mathbb{R})$, so dass $\nu = \{(x,y) : x = g(y)\}$

c) Wir nehmen nun an, dass $\mu \cap \nu = \emptyset$.

- Was bedeutet dies für die Wachstumsraten der beiden Populationen?
- Skizzieren Sie das Richtungsfeld im Phasenraum.
- Welche Gleichgewichtslösungen gibt es? Untersuchen Sie sie auf Stabilität.
- Wie verhalten sich die anderen Lösungen für $t \to \infty$?

d) Versuchen Sie, in derselben Weise den Fall $\mu \cap \nu \neq \emptyset$ zu diskutieren.

Aufgabe 27
Stellen Sie mit Hilfe der Differentialgleichung (1) ein Modell für zwei in Symbiose lebende Arten auf. Finden Sie dazu geeignete mathematische Formulierungen der folgenden Bedingungen:

(i) Wenn die Population einer Art wächst, so steigt die Wachstumsrate der anderen Art.

(ii) Wenn jeweils eine der beiden Populationen sehr groß ist, so wird ihre Population schrumpfen.

(iii) Wenn beide Populationen sehr klein sind, so werden sie beide wachsen.

Abgabe: Donnerstag, 9.6.2005, bis 12:00 Uhr, in die Briefkästen im Foyer.