Prof. Dr. K.F. Siburg
Dipl.-math. I. Bednarek

Fachbereich Mathematik
Universität Dortmund

9. Übungsblatt zu „Gewöhnliche Differentialgleichungen“ SS 2005, 7.6.2005

Aufgabe 28
Bestimmen Sie für das einfache Lotka-Volterra-Modell

$$\begin{cases} \dot{x} = x(A - By) \\ \dot{y} = y(-C + Dx) \end{cases} \tag{1}$$

einen integrierenden Faktor $m(x, y)$, der nur von xy abhängt. Bestimmen Sie weiter eine Hamiltonfunktion für das modifizierte System. Was fällt Ihnen auf?

Aufgabe 29
Wir betrachten die Differentialgleichung $\dot{x} = f(x)$ mit $f \in C^1(D, \mathbb{R})$, wobei $D \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet sei. Zeigen Sie:

a) Sind $M_i \subset D, i \in I$ (I eine beliebige Indexmenge), positiv invariant, so ist auch $\bigcap_{i \in I} M_i$ positiv invariant.

b) Ist $G \in C^1(D, \mathbb{R})$ mit $\langle \nabla G(x), f(x) \rangle \leq 0$ für alle $x \in D$, so ist die Subniveaumenge $M_c := \{x \in D : G(x) \leq c\}$ positiv invariant.

Aufgabe 30
Bestimmen Sie die Nullklinen und stationären Punkte der Differentialgleichung

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + xy \\ \dot{y} = x - xy - x^2 \end{cases} \tag{2}$$

und skizzieren Sie das Richtungsfeld. Begründen Sie allein anhand dessen, dass die folgenden Mengen positiv invariant sind:

- die Halbebene $H := \{(x, y) : x > 1\}$
- ihre untere Hälfte $Q := \{(x, y) : x > 1, y < 0\}$
- deren Hälfte $\Delta := \{(x, y) : x > 1, y < 1 - x\}$

Aufgabe 31
Wir betrachten die beiden folgenden (bereits in Polarkoordinaten transformierten) Differentialgleichungen

a)

$$\begin{cases} \dot{r} = r(1 - r)(2 - r) \\ \dot{\vartheta} = 1 \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} \dot{r} = r(1-r)^2(2-r) \\ \dot{\vartheta} = 1 \end{cases}$$

- Skizzieren Sie für beide Systeme das Phasenportrait in der x-y-Ebene.
- Finden Sie jeweils möglichst viele invariante bzw. positiv invariante Mengen.
- Bestimmen Sie jeweils die Anziehungsbereiche dieser Mengen. Welche der Mengen sind Attraktoren?
- Bestimmen Sie jeweils die ω-Limesmengen von $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Aufgabe 32
Wir betrachten die Differentialgleichung

$$\begin{cases} \dot{x} = x(1 - 2x^2 - 3y^2) - 3y(1-x) \\ \dot{y} = y(1 - 2x^2 - 3y^2) + 2x(1-x) \end{cases}$$

Zeigen Sie:
Die Menge $M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 + 3y^2 = 1\}$ ist ein Attraktor mit Anziehungsbereich $A(M) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Abgabe: Donnerstag, 16.6.2005, bis 12:00 Uhr, in die Briefkästen im Foyer.