Prof. Dr. K.F. Siburg
Dipl.-math. I. Bednarek

Fachbereich Mathematik
Universität Dortmund

10. Übungsblatt zu „Gewöhnliche Differentialgleichungen“ SS 2005, 15.6.2005

Aufgabe 33
Wir betrachten für $\mu > 0$ die Differentialgleichung

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x - x^3 - \mu y(2y^2 - 2x^2 + x^4) \end{cases}$$

Weiter sei die Funktion $L \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ gegeben durch

$$L(x, y) := \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4}.$$

a) Untersuchen Sie, ob L eine Liapunov-Funktion ist.

b) Zeigen Sie: $L^{-1}(0)$ ist invariant.

c) Skizzieren Sie mit Hilfe geeigneter Überlegungen das Phasenportrait.

d) Bestimmen Sie jeweils die ω-Limesmengen von $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Aufgabe 34
Gegeben sei die Differentialgleichung $\dot{x} = f(x)$ im $\mathbb{R}^n$. Weiter sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine abgeschlossene Menge, deren Inneres $intM$ ein Gebiet ist und die ein äußeres Normalenfeld $n : \partial M \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ hat (d.h., in jedem Punkt $x \in \partial M$ zeigt der Vektor $n(x)$ „senkrecht nach außen“).

- Es gelte für alle $x \in \partial M$ die Bedingung $\langle n(x), f(x)\rangle < 0$ („Das Richtungsfeld der Differentialgleichung zeigt nach Innen.“). Zeigen Sie: M ist positiv invariant.
- Es ist sogar $\langle n(x), f(x)\rangle \leq 0$ für alle $x \in \partial M$ hinreichend dafür, dass M positiv invariant ist („Invarianzsatz “).

Aufgabe 35: Brouwerscher Fixpunktsatz
Der Brouwersche Fixpunktsatz sagt:
Jede stetige Abbildung f von $\mathbb{D}_n := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$ in sich hat einen Fixpunkt.
Beweisen Sie dies für den Fall, dass $n = 2$ und f stetig differenzierbar ist, indem sie die Differentialgleichung $\dot{x} = x - f(x)$ betrachten.

Aufgabe 36
Es seien f und g C^1-Vektorfelder auf $\mathbb{R}^2$, so dass für alle $x \in \mathbb{R}^2$ gilt: $\langle f(x), g(x)\rangle = 0$.
Zeigen Sie: Wenn f eine geschlossene Trajektorie hat, so hat g eine Nullstelle.

Abgabe: Donnerstag, 23.6.2005, bis 12:00 Uhr, in die Briefkästen im Foyer.