Prof. Dr. K.F. Siburg
Dipl.-math. I. Bednarek

Fachbereich Mathematik
Universität Dortmund

11. Übungsblatt zu „Gewöhnliche Differentialgleichungen“
SS 2005, 21.6.2005

Aufgabe 37
Betrachten Sie das ebene System

$$\begin{cases} \dot{x} = y^2 \\ \dot{y} = 0 \end{cases}$$

mit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

a) Bestimmen Sie den Fluss der Differentialgleichung, d.h. finden Sie die Lösung $(x(t), y(t))$ für beliebige Anfangswerte $(x(0), y(0))$.

b) Bestimmen Sie speziell die Lösungen $(x(t), y(t))$ und $(x(s,t), y(s,t))$ für die Anfangswerte $(0,1)$ bzw. $(0,1) + s(0,1)$.

c) Ordnen Sie die Terme von $(x(t), y(t))$ und $(x(s,t), y(s,t))$ nach Potenzen von s und bestimmen Sie $\frac{\partial}{\partial s}(x(s,t), y(s,t))|_{s=0}$.

d) Wenn man die Lösung $(x(s,t), y(s,t))$ nur bis zur ersten Ordnung in s betrachtet, erhält man eine Approximation von $(x(s,t), y(s,t))$, die umso besser wird, je kleiner s ist. Illustrieren Sie den Verlauf von $(x(t), y(t))$ und $(x(s,t), y(s,t))$, zusammen mit der Approximation, anhand einer Skizze.

Aufgabe 38
Gegeben sei die parameterabhängige Differentialgleichung $\dot{x} = f(t, x, \alpha)$ auf einem Gebiet $D \subset \mathbb{R}^{1+n+m}$. Zeigen Sie: Ist $f \in C^1(D, \mathbb{R})$, so ist die allgemeine Lösung $x(t, \alpha)$ der Differentialgleichung $\dot{x} = f(t, x, \alpha)$ stetig differenzierbar.

Aufgabe 39
Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{x}{t} + tx^3 \\ x(\tau) = \zeta \end{cases}$$

a) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von den Anfangswerten die Lösung des Anfangswertproblems und das maximale Existenzintervall der Lösung.

b) Bestimmen Sie die Ableitung $\frac{\partial}{\partial \zeta}\varphi^t(\tau, \zeta)$.

Aufgabe 40
Es sei $x(t,\lambda)$ eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} \ddot{x} + (1+\lambda t)x = 0 \\ x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 1 \end{cases} .$$

a) Stellen Sie die zugehörige Variationsgleichung auf.

b) Berechnen Sie $\frac{\partial}{\partial\lambda}x(t,\lambda)$ für $\lambda = 0$.

c) Geben Sie eine sinnvolle Näherung für die Lösung der Gleichung mit kleinem Parameter λ an.

Abgabe: Donnerstag, 30.6.2005, bis 12:00 Uhr, in die Briefkästen im Foyer.