

13. Übungsblatt zu „Gewöhnliche Differentialgleichungen“ SS 2005, 7.7.2005

Aufgabe 44

Zeigen sie, dass die Abbildung f im Fixpunkt $(0, 0)$ die Kegelbedingung (H3) erfüllt für

a) $f(x, y) := \left(\frac{\sin x}{3} + \sin^2 xy, 7y - (e^y - 1)^2 \right)$

b) $f(x, y) := \left(\frac{5}{4}x - \frac{3}{4}y + \frac{3}{5}x^2y, -\frac{3}{4}x + \frac{5}{4}y - \frac{3}{5}xy^2 \right)$

Aufgabe 45

Zeigen sie: Die Shiftabbildung σ ist topologisch mischend, das heißt:

$$\forall U, V \subseteq \Sigma \text{ offen, nichtleer } \exists n \in \mathbb{N} \forall m \geq n : \sigma^m(V) \cap U \neq \emptyset$$

Aufgabe 46

Wir betrachten auf $S^1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ die Rotation ρ_ω um einen festen Winkel ω :

$$\rho_\omega : e^{2\pi i \varphi} \mapsto e^{2\pi i(\varphi + \omega)}$$

Zeigen sie:

a) ρ_ω hat eine dichte Bahn. $\Leftrightarrow \omega \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \Leftrightarrow$ Die Bahn jedes Punktes ist dicht.

b) ρ_ω ist für kein ω topologisch mischend.

Aufgabe 47

Wir betrachten das diskrete dynamische System (\mathbb{R}, f) mit $f(x) := x^2 - 4$. Weiter sei $I := (-3, 3)$. Zeigen sie:

a) $x \notin I \Rightarrow f(x) \notin \bar{I}$ und weiter $x \notin I \Rightarrow f^n(x) \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$)

b) Jedes $y \in I$ hat genau zwei Urbilder und es gilt $f^{-1}(I) = I_0 \cup I_1$, wobei I_0, I_1 zwei disjunkte Intervalle sind mit $|I_0| = |I_1| = \sqrt{7} - 1$.

c) Es ist weiter $f^{-1}(I_0) = I_{00} \cup I_{10}$, wobei $I_{00} \subseteq I_0, I_{10} \subseteq I_1$ zwei disjunkte Intervalle sind mit $|I_{00}| = |I_{10}| \leq \frac{1}{4}(\sqrt{7} - 1)$.
Entsprechend gilt $f^{-1}(I_1) = I_{01} \cup I_{11}$, wobei $I_{01} \subseteq I_0, I_{11} \subseteq I_1$.

d) Das Urbildgebiet von I unter der Iterierten f^{n+1} , also $f^{-(n+1)}(I)$, ist die disjunkte Vereinigung von 2^{n+1} Intervallen $I_{s_0 \dots s_n}$, $s_j \in \{0, 1\}$, mit Länge $|I_{s_0 \dots s_n}| \leq \frac{1}{4^n}(\sqrt{7} - 1)$, wobei gelte $I_{s_0 \dots s_n} \subseteq I_{s_0 \dots s_{n-1}}$ und $f(I_{s_0 \dots s_n}) = I_{s_1 \dots s_n}$.

e) $\Lambda := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(I)$ besteht aus überabzählbar vielen Punkten, aber Λ hat keine inneren Punkte.

f) f ist chaotisch.

Abgabe: Donnerstag, 14.7.2005, bis 12:00 Uhr, in die Briefkästen im Foyer.