

ÜBUNGSBLATT 2

Abgabe in den Briefkästen bis Mittwoch, 2.11.2005, 17 Uhr

Themen: Körper und Körperaxiome, vollständige Induktion

Aufgabe 1. Zeigen Sie Satz 1.10 der Vorlesung mit Hilfe der Körperaxiome und der Rechenregeln:

$$\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \forall b \in \mathbb{R} \exists ! x \in \mathbb{R} : a \cdot x + b = 0.$$

(Hinweis: Weisen Sie die Existenz und Eindeutigkeit von x getrennt nach.)

Aufgabe 2.

- Sei M eine Menge mit $n \in \mathbb{N}$ Elementen. Zeigen Sie:
Die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ hat 2^n Elemente.
- Zeigen Sie Satz 1.14 II der Vorlesung, d.h. die **geometrische Summenformel**:

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} : \sum_{k=0}^n x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

Aufgabe 3. Es seien $n \geq 2$ Geraden in der Ebene gegeben. Wie viele Schnittpunkte kann es höchstens geben?

Aufgabe 4. Zeigen Sie Satz 1.14 V der Vorlesung für $n = 2$:

- Für alle $a, b \in \mathbb{R}_+$ gilt:

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}, \quad \text{und es gilt „}=\text{“} \iff a = b.$$

- Deuten Sie die Aussage in a) für den Flächeninhalt und den Umfang eines Rechtecks geometrisch.