Übungsblatt 3

Abgabe in den Briefkästen bis Mittwoch, 9.11.2005, 17 Uhr

Themen: vollständige Induktion, Supremum und Infimum, Abbildungen, komplexe Zahlen

Aufgabe 1. Man definiert die **Fakultät** einer Zahl $k \in \mathbb{N}_0$ als

$$k! := \prod_{j=1}^{k} j, \quad 0! := 1.$$

Man definiert die **Binomialkoeffizienten**

$$\binom{n}{0} := 1, \quad \binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \text{für alle } n, k \in \mathbb{N}_0 \text{ mit } k \leq n.$$

Zeigen Sie:

a) Für alle $k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}_0$ mit $k \leq n$ gilt:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}.$$

b) Zeigen Sie den **Binomischen Lehrsatz**:

$$\forall\, n \in \mathbb{N}_0, \forall\, x, y \in \mathbb{R}: \quad (x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

c)

$$\forall\, n \in \mathbb{N}_0: \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

Aufgabe 2. Seien M, N Mengen und $f : M \to N$ eine Abbildung. Zeigen Sie: f ist bijektiv genau dann, wenn eine Abbildung $g : N \to M$ existiert mit $(g \circ f)(x) = x \quad \forall\, x \in M$ und $(f \circ g)(y) = y \quad \forall\, y \in N$.
Die Abbildung g ist zudem eindeutig bestimmt und heißt **Umkehrabbildung** von f und wird mit f^{-1} bezeichnet.

Aufgabe 3. Seien $A \subset \mathbb{R}$, $-A := \{-a \mid a \in A\}$.

a) Zeigen Sie: $\sup(-A) = -\inf A$.

b) Wenn $\max A$ existiert, dann gilt $\max A = \sup A$.

c) Formulieren und beweisen Sie einen ähnlichen Satz für $\min\ A$ wie unter b).

Aufgabe 4.

a) Skizzieren Sie folgende Mengen:

   i) $M_1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 2i| \geq 2\}$,

   ii) $M_2 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 4| = |z - i|\}$.

b) In diesem Aufgabenteil sollen Sie die Multiplikation zweier komplexer Zahl geometrisch interpretieren. Gehen Sie dazu in folgenden Schritten vor:

   i) Schreiben Sie zwei komplexe Zahlen z, w in Polarkoordinatendarstellung.

   ii) Multiplizieren Sie z und w in Polarkoordinatendarstellung und vereinfachen Sie das Ergebnis.

   iii) Interpretieren Sie Ihr Ergebnis aus b) geometrisch.