Übungsblatt 4

Abgabe in die Briefkästen bis Mittwoch, 16.11.2005, 17 Uhr

Themen: Abzählbarkeit, metrische Räume, Häufungspunkte und Grenzwerte von Folgen

Aufgabe 1. Zeigen Sie: Jede Teilmenge $M \subseteq \mathbb{N}$ ist abzählbar.

Aufgabe 2. Zeigen Sie in den folgenden Beispielen, dass (X, d) ein metrischer Raum ist.

a) Sei X die Menge der 0-1-Folgen mit

$$d((x_n),(y_n)) := \begin{cases} 0, & \text{falls } x_n = y_n \ \forall\, n \in \mathbb{N}, \\ \max\{\frac{1}{2^n} \mid n \in \mathbb{N} \text{ mit } x_n \neq y_n\}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

b) $X := \mathbb{N}$ und

$$d(m,n) := \begin{cases} 0, & \text{falls } m = n \\ \dfrac{m+n}{mn}, & \text{falls } m \neq n \end{cases}$$

Aufgabe 3.

a) Seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reelle Zahlenfolgen und $a, b \in \mathbb{R}$, so dass $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. Zeigen Sie, dass die Folge $(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, ...)$ genau zwei Häufungspunkte besitzt.

b) Definieren Sie eine reelle Zahlenfolge, die jede natürliche Zahl als Häufungspunkt besitzt.

c) **(freiwillig)** Gibt es eine reelle Zahlenfolge, die **jede reelle Zahl** als Häufungspunkt besitzt?

Aufgabe 4. Weisen Sie nach, dass die jeweilige Folge gegen den angegebenen Grenzwert konvergiert. In den Aufgabenteilen a) - c) liegen die Folgen im metrischen Raum $(\mathbb{C}, |\cdot|)$.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1, \quad$ wobei $a > 0$.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \quad \forall\, a \in \mathbb{R}$.

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \big(\frac{n+2}{n+1} + i\frac{2n}{n+2}\big) = 1 + 2i$.

d) Sei (X, d) der metrische Raum aus Aufgabe 2 a). Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von $0-1-$Folgen in X mit

$$f_n(k) := \begin{cases} 1, & \text{für } 1 \leq k \leq n \\ 0, & \text{für } k > n \end{cases}$$

Konvergiert die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$? Bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.