Übungsblatt 6

Abgabe in die Briefkästen bis Mittwoch, 30.11.2005, 17 Uhr

Themen: Monotone Folgen und Vollständigkeit, Limes superior und inferior, Reihen

Aufgabe 1. Sei $(a_n)_n$ eine Folge in $\mathbb{R}$, die in $\mathbb{R}$ genau einen Häufungspunkt besitzt.

a) Zeigen Sie: Aus diesen Voraussetzungen folgt noch nicht die Konvergenz von $(a_n)_n$.

b) Welche Voraussetzung muss man zusätzlich fordern, damit $(a_n)_n$ konvergiert? Begründen Sie!

Aufgabe 2. Zeigen Sie:

a) Seien $(a_n)_n, (b_n)_n$ beschränkte Folgen in $\mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\limsup(a_n + b_n) \leq \limsup a_n + \limsup b_n.$$

Geben Sie ein Beispiel an, bei dem tatsächlich $<$ gilt.

b) Sei $(a_n)_n$ Folge in $\mathbb{R}$. Zeigen Sie:

$$\liminf a_n > -\infty \quad \Leftrightarrow \quad \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \text{ ist nach unten beschränkt.}$$

Aufgabe 3. Zeigen Sie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e.$$

Beweisen Sie hierfür die Ungleichungen $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \geq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ und $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \leq e$, indem Sie $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ mit Hilfe der binomischen Formel umschreiben.

Aufgabe 4. Gegeben sei die sogenannte **Fibonacci-Folge**

$$f_1 := 1, \quad f_2 := 1, \quad f_{n+2} := f_{n+1} + f_n, \text{ für } n \geq 1.$$

a) Zeigen Sie, dass (f_n) monoton wächst mit $\lim f_n = \infty$.

b) Zeigen Sie, dass der Ansatz $f_n =: a^n$ mit $a \geq 0$ zu den beiden Lösungen $a_\pm := \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ führt.

c) Leider erfüllt der Ansatz aus b) nicht die Anfangsbedingungen $f_1 = f_2 = 1$. Zeigen Sie, dass für beliebige $c_\pm \in \mathbb{R}$ auch die Folge

$$z_n := c_+ a_+^{n-1} + c_- a_-^{n-1}$$

die Rekursionsgleichung $z_{n+2} = z_{n+1} + z_n$ erfüllt.
Wählen Sie nun die Konstanten $c_\pm$ so, dass $z_1 = z_2 = 1$ gilt.
Damit haben Sie bewiesen, dass

$$f_n = c_+ \Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^n + c_- \Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^n.$$

d) Verwenden Sie die Darstellung aus c), um zu zeigen, dass

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = a_+ = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

(Hinweis: Beachten Sie, dass $|a_-| < 1$ und $a_+ > 1$.)

e) Die Zahl $a_+ = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ hat eine besondere geometrische Bedeutung. Finden Sie heraus, welche. Wieso heißt wohl die Fibonacci-Folge umgangssprachlich auch „Kaninchenfolge“?