Übungsblatt 7

Abgabe in die Briefkästen bis Mittwoch, 7.12.2005, 17 Uhr

Thema: Einführung in das wissenschaftliche Arbeiten

Wichtig: Für die sinnvolle Bearbeitung des Übungsblatts reicht es nicht, nur Aufgabe 2 zu bearbeiten!

Aufgabe 1. Sie haben in der Literatur (T. Bröcker, Analysis I, Spektrum, 2. Auflage, S. 50, Satz 2.17 - siehe Anlage) den Umordnungssatz von Riemann gefunden. Der Beweis ist sehr knapp gehalten, viele Aspekte werden nur implizit genannt. Ihre Aufgabe besteht darin, einen ausführlichen Beweis des Satzes zu geben.

Gehen Sie dazu in folgenden Schritten vor:

a) Machen Sie sich die Aussage des Satzes klar. Formulieren Sie dafür die Aussage des Satzes mit Ihren eigenen Worten.

b) Lesen Sie den Beweis und versuchen Sie, die Beweisidee nachzuvollziehen. Formulieren Sie die einzelnen Schritte der Beweisidee (umgangssprachlich) in eigenen Worten.

c) Gehen Sie den Beweis detailliert durch und formulieren Sie alle Aussagen, die implizit verwendet, aber nicht explizit formuliert werden. (Beispiel: Es gibt unendlich viele a_k.)

d) Beweisen Sie die von Ihnen unter c) aufgestellten Aussagen. Ziel ist es, dass sich somit ein schlüssiger Beweis des Umordnungssatzes ergibt.

e) (Muss nicht aufgeschrieben werden, gehört aber zur Überlegung: Vergleichen Sie das Resultat Ihres Beweises noch einmal mit der Aussage des Satzes. Ist der Satz mit Ihrer Beweisversion tatsächlich bewiesen?)

Aufgabe 2. Untersuchen Sie folgende Reihen $\mathbb{R}$ auf Konvergenz und absolute Konvergenz!

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(2n+1)3^n}$, b) $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{k}{k+1}\right)^{k^2}$, c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+6n+8}{n^3+3n^2+2n}$.

Wählen wir nun n so groß, daß diese Bedingung für alle $r \geq n$ erfüllt ist, so ist b_n eine Summe von Gliedern c_j, worunter jedenfalls alle $c_1, \ldots, c_m$ auftreten. Dasselbe gilt für a_n, und die Differenz ist folglich eine Summe von Gliedern $\pm c_j$, mit $j > m$. Daher

$$|a_n - b_n| \leq \sum_{j>m} |c_j| < \varepsilon.$$

Das zeigt schon, daß (b_n) gegen denselben Grenzwert wie (a_n) konvergiert. Wendet man das schon Gezeigte auf die Reihe $\sum |c_n|$ an, so folgt die absolute Konvergenz der umgeordneten Reihe. □

Für nicht absolut konvergente Reihen gilt das gerade Gegenteil:

(2.17) Satz. *Ist $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ konvergent aber nicht absolut konvergent und $x \in \mathbb{R}$ beliebig, so existiert eine Umordnung $\rho : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, sodaß $\sum_{k=1}^{\infty} c_{\rho(k)} = x$.*

Beweis: Sei (a_k) die Folge der positiven und (b_k) die Folge der negativen Glieder c_k der betrachteten Reihe. Weil $\sum c_k$ konvergiert, aber nicht absolut, gilt offenbar

$$(a_k) \to 0, \qquad (b_k) \to 0,$$
$$\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k\Big) \to \infty, \quad \Big(\sum_{k=1}^{n} b_k\Big) \to -\infty.$$

Wir wählen jetzt als Folge $c_{\rho(\ell)}$ rekursiv jeweils das nächste noch nicht gewählte Glied der Folge (a_k) bzw. (b_k), jenachdem

$$d_{\ell-1} := \sum_{k=1}^{\ell-1} c_{\rho(k)} < x \quad \text{oder} \quad \geq x.$$

Es ist dann schließlich $|c_{\rho(\ell)}| < \varepsilon$ für $\ell \geq L$, und ist etwa $d_L < x$, $d_{L+k} \geq x$, so ist $|d_\ell - x| < \varepsilon$ für $\ell > L + k$. □