

ÜBUNGSBLATT 8

Abgabe in die Briefkästen bis Mittwoch, 14.12.2005, 17 Uhr

Themen: Stetige Funktionen

Aufgabe 1. Zeigen Sie für $f(x) := \frac{1}{x}$:

- f ist stetig auf $(0, \infty)$, aber nicht Lipschitz-stetig.
- Ist f Lipschitz-stetig auf $[1, \infty)$? Beweis!

Aufgabe 2. Zeigen Sie:

- Für $k \in \mathbb{N}_0$ ist $f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f_k(x) := \begin{cases} x^k \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

stetig genau dann, wenn $k \neq 0$.

Skizzieren Sie die Graphen von f_0, f_1, f_2 .

- Konstruieren Sie eine monotone Funktion $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, die unendlich viele Unstetigkeitsstellen besitzt.
(Schaffen Sie es auch, eine monotone Funktion mit überabzählbar vielen Unstetigkeitsstellen zu finden? - Suchen Sie nicht zu lange ...)

Aufgabe 3.

Definition Eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt in x_0 linksseitig [bzw. rechtsseitig] stetig, wenn gilt: $\lim_{x \nearrow x_0} f(x) := \lim_{x \rightarrow x_0, x < x_0} f(x) = f(x_0)$ [bzw. $\lim_{x \searrow x_0} f(x) := \lim_{x \rightarrow x_0, x > x_0} f(x) = f(x_0)$].

- Zeigen Sie folgenden
Satz. f ist stetig in x_0 genau dann, wenn f links- und rechtsseitig stetig in x_0 ist.
- Finden Sie eine Funktion, die in 0 links-, aber nicht rechtsseitig stetig ist.
- Finden Sie eine Funktion, die in 0 weder links- noch rechtsseitig stetig ist.

Aufgabe 4.

a) Sei $\mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ der metrische Raum der beschränkten Funktionen

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, versehen mit der Supremumsnorm

$$d(f, g) := \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - g(x)|.$$

Zeigen Sie, dass die Auswertungsfunktion $F : (\mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), d) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $F(f) := f(0)$ Lipschitz-stetig ist mit Lipschitz-Konstante 1.

b) Zeigen Sie:

Seien X, Y metrische Räume und $f : X \rightarrow Y$ gleichmäßig stetig. Dann ist das Bild $(f(x_n))$ jeder Cauchy-Folge (x_n) wieder eine Cauchy-Folge. (Denken Sie über die Umkehrung des Satzes nach. Gilt sie z.B. in vollständigen metrischen Räumen?)