Übungsblatt 9

Abgabe in die Briefkästen bis Mittwoch, 04.01.2005, 17 Uhr

Themen: Gemischte Aufgaben

Aufgabe 1.

a) Zeigen Sie: Sind $\sum a_k$ und $\sum b_k$ zwei konvergente Reihen, so ist das Cauchyprodukt $\sum c_k$ der beiden Reihen nicht notwendigerweise konvergent.
(Hinweis: Betrachten Sie den Fall $a_k = b_k := \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$, und benutzen Sie Aufgabe 4 vom 2. Übungszettel.)

b) Beweisen Sie das **Minorantenkriterium**:
Sei $\sum x_n$ eine Reihe in $\mathbb{R}$. Sei $\sum b_n$ eine divergente Reihe mit $b_n \geq 0 \; \forall n \in \mathbb{N}$. Falls $b_n \leq x_n$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$, so ist $\sum x_n$ divergent.

Aufgabe 2.

a) Bestimmen Sie den lim sup und lim inf der gegebenen Folgen:
i) $\frac{(-1)^n}{2n+1}$, ii) $(-1)^n(2+\frac{3}{n})$.

b) Sei (a_n) eine beschränkte monoton fallende Folge in $\mathbb{R}$. Zeigen Sie:

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Gilt die Behauptung für jede *beschränkte* Folge? Wenn ja, Beweis!

Aufgabe 3.

a) Berechnen Sie den Konvergenzradius R für folgende Potenzreihen in $\mathbb{R}$ und bestimmen Sie *alle* x, für die die Reihen konvergieren.
a) $\sum\limits_{p \; prim} x^p$ b) $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{x^n}{n}$.

b) Zeigen Sie durch vollständige Induktion:

$$n^2 \leq 2^n$$

für alle $n \geq 4$.

Aufgabe 4.

a) Sei

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}\backslash\{1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x^n-1}{x-1}. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f stetig fortsetzbar auf $\mathbb{R}$ ist und geben Sie die Fortsetzung an.

b) Sei

$$f : \begin{cases} \mathbb{C}\backslash\{0\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \frac{e^z-a}{z}. \end{cases}$$

Bestimmen Sie alle $a \in \mathbb{C}$, für die f auf $\mathbb{C}$ stetig fortsetzbar ist. Geben Sie die Fortsetzung von f auf $\mathbb{C}$ an.

Fehler im Skript: Im Beweis des Wurzelkriteriums in Satz 2.30 II muss „für alle $n \geq n_0$“ durch „für unendlich viele n“ ersetzt werden.