Übungsblatt 10

Abgabe in die Briefkästen bis Mittwoch, 11.01.2005, 17 Uhr

<u>Thema:</u> Topologie

Aufgabe 1. Zeigen Sie:

a) $M_1 := \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist in $\mathbb{R}$ nicht kompakt.

b) $M_2 := \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ ist in $\mathbb{R}$ kompakt.

Versuchen Sie, an Hand dieses Beispiels eine allgemeine Vermutung (ohne Beweis!) darüber aufzustellen, wann in einem metrischen Raum eine nichtkompakte Menge durch Hinzunahme eines einzigen Punktes kompaktifiziert werden kann.

Aufgabe 2. Sei $X = \mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ der Raum der beschränkten Funktionen auf $\mathbb{R}$ mit $d(f,g) = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x) - g(x)|$. Sei

$$M := \{f \in X \mid \exists \max f \text{ und } \max f \leq 1\}.$$

Zeigen Sie:

$$\overline{M} = \{f \in X \mid \sup f \leq 1\}.$$

Aufgabe 3. Sei X ein metrischer Raum, $M \subset X$. Zeigen Sie:

a) Endliche Durchschnitte offener Mengen sind offen. (Finden Sie ein Gegenbeispiel zu der Aussage: Beliebige Durchschnitte von offenen Mengen sind offen.)

b) Folgern Sie aus a): Endliche Vereinigungen abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen. (Finden Sie ein Gegenbeispiel zu der Aussage: Beliebige Vereinigungen abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen.)

c) $\overline{M} = X \quad \Leftrightarrow \quad M$ ist dicht in X.

d) M offen $\quad \Leftrightarrow \quad \partial M \cap M = \emptyset$.

e) M abgeschlossen $\quad \Leftrightarrow \quad \partial M \subseteq M$.

Aufgabe 4. Sei $X = \mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ der Raum der beschränkten Funktionen auf $\mathbb{R}$ mit $d(f, g) = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - g(x)|$. Untersuchen Sie, ob folgende Mengen abgeschlossen bzw. offen sind und beweisen Sie Ihre Behauptungen:

a) $M_1 := \{f \in X \mid f(0) = 0\}$.

b) $M_2 := \{f \in X \mid \exists n \in \mathbb{N} : f(x) = 0 \text{ für } |x| \geq n\}$.