Übungsblatt 11

Abgabe in die Briefkästen bis Mittwoch, 18.01.2005, 17 Uhr

Themen: Sätze über stetige Funktionen, Exponentialfunktion und Logarithmus, Differenzierbarkeit

Aufgabe 1. Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f([0,1]) = [0,1]$. Zeigen Sie: f besitzt einen Fixpunkt.
(Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, $g(x) := f(x) - x$.)

Aufgabe 2. Zeigen Sie folgende erstaunliche Aussage mit dem Zwischenwertsatz:
Auf der Erdoberfläche gibt es immer Antipodenpunkte mit der selben Temperatur.
(Hinweis: Betrachten Sie die Differenz der Temperatur in den Antipodenpunkte als stetige Funktion.)

Aufgabe 3.

a) Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$: $\lim\limits_{x \searrow 0} x^n \log x = 0$ und $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\log x}{x^n} = 0$.

b) Zeigen Sie: $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}, f(z) := \mathrm{Re}(z)$ ist nirgends differenzierbar.

c) Bestimmen Sie die Ableitung von $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit
i) $f(x) := x^x$, ii) $f(x) := \frac{\log(1+x^2)}{2+\sqrt[5]{x^3}}$.

Aufgabe 4. Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie:
f ist auf (a,b) gleichmäßig stetig $\iff$ $\exists$ stetige Fortsetzung $\overline{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ von f.