Übungsblatt 12

Abgabe in die Briefkästen bis Mittwoch, 25.01.2005, 17 Uhr

Themen: Differenzierbarkeit

Aufgabe 1. Zeigen Sie für $n \in \mathbb{N}_0$:

$$|x|x^n \in C^n(\mathbb{R},\mathbb{R}) \backslash C^{n+1}(\mathbb{R},\mathbb{R}).$$

Aufgabe 2. Zeigen Sie: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit:

$$f(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann gilt: $f \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ mit $f^{(n)}(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 3. Der **Tangens von x** ist wie folgt definiert: $\tan x := \frac{\sin x}{\cos x}$.

a) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$ von $\tan x$ und skizzieren Sie die Funktion.

b) Wie muss die Tangensfunktion auf $\mathcal{D}$ eingeschränkt werden, damit die Umkehrfunktion $\arctan x$ existiert? Definieren Sie $\arctan x$ und skizzieren Sie die Funktion.

c) Berechnen Sie die Ableitung von $\tan x$ und $\arctan x$.

Aufgabe 4. Sei $n \in \mathbb{N}$. Eine Nullstelle $a \in \mathbb{R}$ einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt **Nullstelle der Ordung** n, falls f n-mal differenzierbar ist und $f^{(k)}(a) = 0$ für alle $k \leq n-1$ und $f^{(n)}(a) \neq 0$.

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n-mal stetig differenzierbar. Zeigen Sie, dass die Funktion f in $a \in \mathbb{R}$ eine Nullstelle der Ordnung $\geq n$ hat, genau dann wenn $f(x) = g(x) \cdot (x-a)^n$ für eine in a stetige Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.