Übungsblatt 13

Abgabe in die Briefkästen bis Mittwoch, 01.02.2005, 17 Uhr

Themen: Mittelwertsatz, Taylorentwicklung, konvexe Funktionen

Aufgabe 1. Bestimmen Sie folgende Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} n(1-\cos(\frac{1}{n}))$,

b) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt[3]{n^2+a^2} - \sqrt[3]{n^2})$ für $a \in \mathbb{R}$.

Hinweis: Fassen Sie die Folge als Einschränkung einer Funktion auf $\mathbb{R}$ auf und benutzen Sie den Mittelwertsatz.

Aufgabe 2. Entwickeln Sie folgende Funktionen $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ in eine Taylorreihe um den Entwicklungspunkt x_0.

a) $f(x) = \sin x, \quad \mathcal{D} = \mathbb{R}, x_0 = 0,$

b) $f(x) = \log(1+x), \quad \mathcal{D} = (-1,\infty), x_0 = 0,$

c) $f(x) = 1 + x + x^2, \quad \mathcal{D} = \mathbb{R}, x_0 = 1.$

d) Ist die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = |x|x^n$ um $x_0 = 0$ in eine Taylorreihe entwickelbar?

Wo konvergieren die jeweiligen Taylorreihen? Stellen die Reihen die jeweils ursprüngliche Funktion dar?

Aufgabe 3. *Konstruktion einer stetigen, nirgends differenzierbaren Funktion* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Funktion, die auf $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ mit dem absoluten Betrag übereinstimmt und die auf ganz $\mathbb{R}$ periodisch mit Periode 1 fortgesetzt wird, also:

$$g(x) := |x-n| \quad \text{für } x \in [n-\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}], \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Sei $g_j(x) := \frac{1}{2^j} g(2^j x)$. Wir betrachten die Funktion

$$f(x) := \sum_{j=0}^{\infty} g_j(x).$$

Zeigen Sie:

a) f ist eine auf $\mathbb{R}$ wohldefinierte Funktion,

b) f ist stetig,

c) f ist in keinem Punkt $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar. Hilfreich ist hierfür die folgende Betrachtung (die zu beweisen ist): Ist f differenzierbar in $x \in \mathbb{R}$ und sind $(a_n), (b_n)$ Folgen mit $a_n \leq x \leq b_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = x$, so gilt:
$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} = f'(x).$$

Aufgabe 4. Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwei konvexe Funktionen. Beweisen oder widerlegen Sie:

a) Die Menge aller konvexen Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

b) Mit f, g ist auch $f \cdot g$ konvex.

Freiwillige Zusatzfrage. Auf dem 11. Übungsblatt haben Sie gezeigt, dass es Antipodenpunkte auf der Erdoberfläche gibt, die die selbe Temperatur haben. Anstelle der Temperatur hätte man natürlich auch den Luftdruck oder ähnliche Meßgrößen betrachten können. Denken Sie über folgende Problemstellung nach: Gibt es sogar Antipodenpunkte, in denen die Temperatur **und** der Luftdruck übereinstimmen?