Übungsblatt 14

Ohne Abgabe

Themen: Gemischte Aufgaben zu Funktionen (Potenzreihen, Stetigkeit, Differenzierbarkeit)

Aufgabe 1. Bestimmen Sie folgende Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x(1 - \cos x)}$

b) $\lim\limits_{x \searrow 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{\exp(x) - 1}$

c) $\lim\limits_{x \searrow 0} (\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}$

Aufgabe 2. Zeigen Sie den Satz vom **Sandwich**:
In der Ebene gibt es einen Schnitt, der zwei beschränkte Mengen *gleichzeitig* halbiert. Denken Sie bei den Mengen an Brot und Schinken.
(Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 1 des Präsenzzettels 11.)

Aufgabe 3. In dieser Aufgabe sollen Sie sich wichtige Eigenschaften der **Hyperbelfunktionen** selbst erarbeiten:

$$\cosh x := \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \quad \text{cosinus hyperbolicus}$$
$$\sinh x := \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \quad \text{sinus hyperbolicus}$$
$$\tanh x := \frac{\sinh x}{\cosh x} \quad \text{tangens hyperbolicus}$$
$$\coth x := \frac{\cosh x}{\sinh x} \quad \text{cotangens hyperbolicus}$$

a) Zeigen Sie: $(\cosh x)^2 - (\sinh x)^2 = 1 \quad$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

b) Berechnen Sie die Ableitungen von $\cosh x, \sinh x, \tanh x, \coth x$.

c) Entwickeln Sie $\cosh x$ und $\sinh x$ in eine Potenzreihe um 0.

d) Zeigen Sie: $\tanh x$ ist um 0 in eine Potenzreihe entwickelbar. Berechnen Sie die Koeffizienten bis einschließlich zur 5. Ordnung.

e) Diskutieren Sie die Funktionen $\cosh,\ \sinh$ bezüglich Konvexität und Konkavität. Skizzieren Sie hierfür auch die Graphen beider Funktionen.

Aufgabe 4. Seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein nichttriviales Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine im Inneren von I differenzierbare Funktion. Dann gilt nach dem Mittelwertsatz

$$f(x+h) - f(x) = f'(x+\theta h)h, \quad x, x+h \in I, \quad \theta \in (0,1).$$

Fassen Sie $\theta = \theta(h)$ als von h abhängige Funktion auf.
Untersuchen Sie im Folgenden das Verhalten von $\theta(h)$, falls h gegen 0 strebt.
Gehen sie dabei von folgenden zusätzlichen Voraussetzungen aus:
Sei $f \in C^2(I, \mathbb{R})$ und $f''(x) \neq 0$.
Zeigen Sie:

$$\lim_{h \to 0} \theta(h) = \frac{1}{2}. \qquad (*)$$

(Hinweis: Verwenden Sie eine geeignete Taylorentwicklung von f.)
Interpretieren Sie das Ergebnis (*) in Bezug auf den Mittelwertsatz.