Universität Dortmund
Institut für Analysis
Prof. Dr. K. Menke

Dortmund, 7. November 2005

Analysis I für Lehramt Gymnasium

4. Übungsblatt, WS 2005/06

Abgabe bis Montag, 14. November 2005, 10:15 Uhr, in die Kästen im Foyer.

Aufgabe 1

Bestimmen Sie für die folgenden Mengen $A_j \subset \mathbb{R}$ jeweils, falls vorhanden, deren Supremum, Infimum, Maximum und Minimum.

$$A_1 = \left\{ 1 + \frac{n}{n+1} \ : \ n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{2\} \qquad A_2 = \left\{ (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n} \right) \ : \ n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$A_3 = \left\{ \frac{(-1)^n}{2} \left(n + \frac{1}{2} + \frac{(-1)^{n+1}}{2} \right) \ : \ n \in \mathbb{N} \right\} \qquad A_4 = \left\{ \frac{1-t}{1+t} \ : \ 0 \le t < 1 \right\}$$

Aufgabe 2

Es seien a und b positive reelle Zahlen. Beweisen Sie die folgenden Ungleichungen:

a) $\sqrt[n]{a+b} \le \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} \qquad (n \in \mathbb{N})$

b) $\left| \sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b} \right| \le \sqrt[n]{|a-b|} \qquad (n \in \mathbb{N})$

Aufgabe 3

Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke:

a) $\sqrt[3]{625}\sqrt[6]{81}$

b) $\dfrac{a^2 \sqrt[3]{a}}{\sqrt[6]{a}} \qquad (a > 0)$

c) $\dfrac{18}{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}$

d) $\sqrt{9x^2 - 12x + 4} \qquad (x \in \mathbb{R})$

Aufgabe 4

Beweisen Sie folgende Aussagen:

a) Für $x > -1$ und $r \in \mathbb{Q} \cap]0,1[$ gilt: $\quad (1+x)^r \le 1 + rx$

b) Der Inhalt eines Rechtecks von gegebenem Umfang wird für das Quadrat am größten.

Für welche x gilt in a) das Gleichheitszeichen?