Universität Dortmund
Institut für Analysis
Prof. Dr. K. Menke

Dortmund, 14. November 2005

Analysis I für Lehramt Gymnasium

5. Übungsblatt, WS 2005/06

Abgabe bis Montag, 21. November 2005, 10.15 Uhr, in die Kästen im Foyer.

Aufgabe 1

Bestimmen Sie für die Folge (a_n) mit

$$a_n = \frac{n^2 + 4n + 2}{2n^2 + 3n}$$

ein $a \in \mathbb{R}$ und zu $\varepsilon > 0$ ein $n_0 > 0$, sodass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n > n_0$ gilt.

Aufgabe 2

Untersuchen Sie auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert:

a) $a_n = \dfrac{3n^2 + n + 1}{5n^2 + 4n + (-1)^n}$

b) $b_n = (-1)^n \dfrac{5n^3 + 7n^2}{3n^5 + 1}$

c) $c_n = \dfrac{n^2 + 1}{n - 3}$

Aufgabe 3

Untersuchen Sie auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert:

a) $a_n = \dfrac{n(1 + (-1)^n)}{2^n}$

b) $c_n = \sqrt{n^4 + n^2 + 1} - n^2 - 1$

Aufgabe 4

Es sei (a_n) eine Folge. Welche der folgenden Bedingungen sind hinreichend dafür, dass (a_n) eine Nullfolge ist?

a) Es gibt zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n| + |a_{n+1}| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$.

b) Es gibt zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n + a_{n+1}| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$.

c) Es gibt zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n| \leq 2\varepsilon^2$ für alle $n \geq 3n_0$.

d) Es gibt ein $\varepsilon_0 > 0$ und ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $\varepsilon > \varepsilon_0$ und $n > n_0$ gilt $|a_n| < \varepsilon$.

e) Es gibt ein $\varepsilon_0 > 0$, so dass es zu jedem ε mit $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt mit $|a_n| < \varepsilon$ für alle $n > n_0$.
(D.h.: „Es genügt, hinreichend kleine ε zu betrachten.“)

Geben Sie jeweils einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.