Universität Dortmund
Institut für Analysis
Prof. Dr. K. Menke

Dortmund, 21. November 2005

Analysis I für Lehramt Gymnasium

6. Übungsblatt, WS 2005/06

Abgabe bis Montag, 28. November 2005, 10.15 Uhr, in die Kästen im Foyer.

Aufgabe 1

Bestimmen Sie die Grenzwerte der Folgen:

a) $\sqrt[n]{4n^2 + 3n + \dfrac{5^n}{n!}}$

b) $\dfrac{2^n(n+1)!}{n^{n+2}} \sqrt[n]{3^n + 4^n}$

c) $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{2n+1}$

d) $\left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)^{n}$

Hinweis: Schätzen Sie die Folge in d) mit Hilfe der Bernoullischen Ungleichung ab.

Aufgabe 2

Bestimmen Sie $\sqrt{3}$ näherungsweise, indem Sie vier Schritte

a) des Intervallhalbierungsverfahrens mit den Startwerten $a_0 = \frac{3}{2}$ und $b_0 = 2$ bzw.

b) des Heron-Verfahrens mit dem Startwert $a_0 = \frac{3}{2}$ durchführen.

Aufgabe 3

Es sei $1 < a_1 < 2$ und es sei (a_n) rekursiv definiert durch $a_{n+1} := a_n^2 - 2a_n + 2$.

a) Zeigen Sie $1 < a_n < 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

b) Beweisen Sie, dass (a_n) monoton fallend ist.

c) Bestimmen Sie den Grenzwert von (a_n).

Aufgabe 4

a) Es sei $a_n := \dfrac{n^n}{3^n n!}$. Zeigen Sie: Die Folge (a_n) ist monoton fallend. Berechnen Sie den Grenzwert der Folge a_n.

b) Es sei $a_n := \sum\limits_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$. Zeigen Sie: Die Folge (a_n) ist konvergent mit $\frac{1}{2} \leq \lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq 1$.

*c) Es sei (a_n) konvergent mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Zeigen Sie: Die Folge (b_n) mit $b_n := \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ ist ebenfalls konvergent mit $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$. Gilt auch die Umkehrung?

Die mit * gekennzeichnete Aufgabe ist eine anspruchsvollere Zusatzaufgabe. Bitte die Lösungen zu dieser Teilaufgabe einzeln in Briefkasten Nr.30 einwerfen.