

Analysis I für Lehramt Gymnasium

8. Übungsblatt, WS 2005/06

Abgabe bis Montag, 12. Dezember 2005, 10:15 Uhr, in die Kästen im Foyer.

Aufgabe 1

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

- a) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{3x}{2x+5} - \frac{x}{x+1} \right) \frac{1}{x-2}$ b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^n - 1)(x^{n-1} - 1)}{(x-1)(x^2 - 1)} \quad (n \geq 2)$
- c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x - \sqrt{x^2 + 5} \right)$ d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \frac{x^2 + 1}{2x^2 - 1}$

Aufgabe 2

Überprüfen Sie die Existenz folgender Grenzwerte und bestimmen Sie diese gegebenenfalls:

- a) $\lim_{x \rightarrow 1} \sin \frac{1}{x-1}$ b) $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x^2}$
- c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x^2}$

Aufgabe 3

Es sei H die Heaviside-Funktion mit $H(0) := \frac{1}{2}$ und es seien $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch:

$$f(x) := (H(x-1) + 1)(x^3 + 1) \qquad g(x) := (H(x-1) + 1)(x^3 - 1)$$

- a) Zeigen Sie, dass f und g jeweils monoton wachsend sind.
- b) Bestimmen Sie jeweils deren rechts- und linksseitigen Grenzwert im Punkt $x_0 = 1$.
- c) Existieren $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ bzw. $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$? Begründen Sie Ihr Ergebnis!

Aufgabe 4

Es seien $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Zeigen oder widerlegen Sie:

- a) Sind f und g jeweils monoton wachsend, so ist auch $f + g$ monoton wachsend.
- b) Sind f und g jeweils monoton wachsend, so ist auch $f \circ g$ monoton wachsend.
- c) Ist f streng monoton wachsend, so ist f nicht beschränkt.