Universität Dortmund
Institut für Analysis
Prof. Dr. K. Menke

Dortmund, 12. Dezember 2005

# Analysis I für Lehramt Gymnasium

Weihnachtsblatt, WS 2005/06

**Abgabe** bis Montag, 2. Januar 2006, 10:15 Uhr, in die Kästen im Foyer.

**Aufgabe 1** *

Die Folge der Fibonaccizahlen ist definiert durch

$$f_0 := 0,\ f_1 := 1 \text{ und } f_{n+2} := f_{n+1} + f_n \text{ für } n \in \mathbb{N}_0.$$

a) Beweisen Sie für alle $n \in \mathbb{N}_0$ die Formel $\sum\limits_{k=0}^{n} f_k^2 = f_n f_{n+1}$.

b) Beweisen Sie für alle $n \in \mathbb{N}_0$ die Formel $f_{n+1}^2 + f_n^2 = f_{2n+1}$.

c) Es sei $a := \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)$ und $b := \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{5}\right)$. Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(a^n - b^n\right)$.

d) Die Folge $(a_n)$ sei definiert durch $a_n := \frac{f_{n+1}}{f_n}$. Zeigen Sie: Die Folge $(a_n)$ ist konvergent mit $\lim\limits_{n\to\infty} = a$.

e) Die Folge $(a_n)$ ist nicht monoton.

Bemerkung: Die Zahl $a$ ist gerade der „Goldene Schnitt“ der bildenden Kunst.
Hinweis zu c): Es ist $1 + a = a^2$.

**Aufgabe 2** *

Die Folgen $(a_n)$, $(b_n)$ und $(c_n)$ seien definiert durch:

$$a_n := \sqrt{n+1000} - \sqrt{n},\ b_n := \sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n} \text{ und } c_n := \sqrt{n + \frac{n}{1000}} - \sqrt{n}$$

a) Berechnen Sie mit ihrem Taschenrechner die Werte $a_n$, $b_n$ und $c_n$ für ein $n \in \mathbb{N}$ so gross wie möglich.

b) Zeigen Sie: Für $n \le 10^6$ gilt $a_n \ge b_n \ge c_n$.

c) Zeigen Sie: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \frac{1}{2}$ und $(c_n)$ konvergiert uneigentlich gegen $\infty$.

*=Die beiden ersten Aufgaben dienen in erster Linie der Wiederholung. Bearbeitungen zu diesen beiden Aufgaben bitte in Briefkasten Nr.30 einwerfen.

### Aufgabe 3

(Aus dem Schulunterricht der 10.Klasse.) Gegeben sei ein Kreis mit Radius 1. Diesem werde ein Quadrat, ein regelmässiges Achteck,..., ein regelmässiges $2^n$-Eck ($n \in \mathbb{N}, n > 1$) einbeschrieben.

a) Fertigen Sie eine geeignete Skizze an.

b) Berechnen Sie den Flächeninhalt $A_n$ des einbeschriebenen $2^n$-Ecks.

c) Begründen sie (vor dem Hintergrund der Analysisvorlesung), warum die Folge $(A_n)$ konvergiert.

d) Geben Sie eine sinnvolle Näherung für $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$ an.

### Aufgabe 4

Gegeben seien die Funtionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \to \mathbb{R}$ mit:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{x^2} & \text{für } x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & \text{für } x = 0 \end{cases} \qquad g(x) = \frac{x^2 - x}{|x| - 1}$$

a) Zeigen Sie, dass $f$ stetig in 0 ist, indem Sie den Grenzwert $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1-\cos 2h}{h^2}$ auswerten. (Tipp: Additionstheoreme!)

b) Zeigen Sie, dass $g$ stetig ist. Ist $g$ in den Ausnahmepunkten 1 und $-1$ stetig fortsetzbar?

### Aufgabe 5

Gegeben sei das Polynom $P(x) = x^3 - 4x^2 - 3x + 1$. Zeigen Sie (ohne die Nullstelle auszurechnen), daß $P$ in $[0, 1]$ eine Nullstelle besitzt, und führen Sie ausgehend von diesem Intervall 3 Schritte der Intervallhalbierung durch, um eine Näherung für eine Nullstelle zu bekommen.

### Aufgabe 6

a) Der Grad $n$ des Polynoms $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0$ sei ungerade, und es seien $a < b$ gegeben mit $P(a) > 0$ und $P(b) < 0$. Zeigen Sie, dass $P$ mindestens drei verschiedene Nullstellen besitzt.

b) Zeigen Sie, dass eine stetige Funktion $f : [0, 1] \to [0, 1]$ einen Fixpunkt besitzt, d.h. ein $x_0 \in [0, 1]$ mit $f(x_0) = x_0$. (*Hinweis:* Untersuchen Sie $f(x) - x$.)

Frohe Weihnachten und einen guten Rutsch ins Jahr $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2\left(\sqrt[3n]{n^2 + 2^{6n}} + \sqrt[n]{\left(2005 + \frac{n!}{n^n}\right) 999^n}\right)}{n^2 + (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$!