Universität Dortmund
Institut für Analysis
Prof. Dr. K. Menke

Dortmund, 9. Januar 2006

Analysis I für Lehramt Gymnasium

11. Übungsblatt, WS 2005/06

Abgabe bis Montag, 16. Januar 2006, 10:15 Uhr, in die Kästen im Foyer.

Aufgabe 1

Entscheiden Sie, wo folgende Funktionen differenzierbar sind, und bestimmen Sie dort deren Ableitung:

a) $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-9}$

b) $f(x) = x^2\sqrt{\dfrac{1}{2}x^2 + 3\,x + 1}$

c) $f(x) = e^{\sin 3x}$

d) $f(x) = e^{x^2+1}\sin\dfrac{1}{x}$

e) $f(x) = \ln\left(-x + \sqrt{x^2+1}\right)$

f) $f(x) = x|x|$

Aufgabe 2

Bestimmen Sie Nullstellen, Minimum und Maximum der Funktion $f : [-5, 3] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := (x^3 + x^2 - 14x - 24)\, e^x$$

und skizzieren Sie deren Graphen (zum Beispiel mit Maple).

Aufgabe 3

Beweisen Sie mit dem Mittelwertsatz folgende Aussagen:

a) $e^x > 1 + x$ für $x > 0$ und $x < 0$

b) $\log(1+x) \geq \frac{x}{x+1}$ für $x > -1$

c) $x < \tan x$ für $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$

Aufgabe 4

Zeigen Sie:

a) Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar, so liegt zwischen zwei Nullstellen von f eine Nullstelle von f'.

b) Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sogar n-mal differenzierbar und $f^{(n)}$ hat höchstens k Nullstellen, so hat f höchstens $k + n$ Nullstellen.

c) Die Gleichung $2^x = 1 + x^2$ hat in $\mathbb{R}$ genau drei Lösungen.