UNIVERSITÄT DORTMUND
INSTITUT FÜR ANALYSIS
Prof. Dr. K. Menke

Dortmund, 16. Januar 2006

Analysis I für Lehramt Gymnasium

12. Übungsblatt, WS 2004/05

Abgabe bis Montag, 23. Januar 2006, 10:15 Uhr, in die Kästen im Foyer.

Aufgabe 1

Zeigen Sie, dass die auf $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f(x) = (x^2 - 2x + 3)\, e^x$ eine Umkehrfunktion f^{-1} besitzt, die auf $\mathbb{R}$ differenzierbar ist. Berechnen Sie

$$\left(f^{-1}\right)'(2\,e).$$

Aufgabe 2

Gegeben sei die Funktion $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := \cos x$. Zeigen Sie:

a) Es ist f streng monoton fallend und die Umkehrfunktion arccos existiert in $[-1, 1]$.

b) Für $|y| < 1$ ist arccos differenzierbar mit $\arccos'(y) = \dfrac{-1}{\sqrt{1 - y^2}}$.

Zusatz: Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $g(x) := \arcsin x + \arccos x$ und machen Sie damit eine Aussage über die Funktion g.

Aufgabe 3

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := \tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x}$. Zeigen Sie:

a) f ist stetig und streng monoton wachsend in $\mathbb{R}$ und die Umkehrfunktion Artanh existiert in $]-1, 1[$.

b) Artanh ist differenzierbar in $]-1, 1[$ mit $\operatorname{Artanh}'(y) = \dfrac{1}{1 - y^2}$.

c) Es ist $\operatorname{Artanh}(y) = \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{1 + y}{1 - y}$.

Aufgabe 4

Berechnen Sie folgende Grenzwerte:

a) $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{e^{2x-1} - e^x}{\sin(\pi x)}$

b) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos 3x}{1 - \cosh 2x}$

c) $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} (1 - \cos x) \log x$

d) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{2x + \sin x}{3x + \cos x}$