

## Analysis I für Lehramt Gymnasium

13. Übungsblatt, WS 2004/05

**Abgabe** bis Montag, 30. Januar 2006, 10:15 Uhr, in die Kästen im Foyer.

### Aufgabe 1

Bestimmen Sie für die Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = x^2 e^{-x}$  alle

- Nullstellen, lokalen Extrema und Wendepunkte,
- Intervalle, in denen  $f$  streng monoton ist,
- Intervalle, in denen  $f$  konvex bzw. konkav ist,

und skizzieren Sie den Graphen von  $f$ .

### Aufgabe 2

Gegeben sei die Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = (1 + \frac{1}{9}x^2) e^x$ .

- Bestimmen Sie das 2. Taylorpolynom  $T_2$  von  $f$  an der Stelle  $x_0 = 0$ .
- Zeigen Sie für alle  $x \in [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$  die Abschätzung

$$|f(x) - T_2(x)| < \frac{1}{100}.$$

### Aufgabe 3

Gegeben sei die Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = e^{\sin x}$ .

- Bestimmen Sie das 2. Taylorpolynom  $T_2$  von  $f$  an der Stelle  $x_0 = 0$ .
- Zeigen Sie für alle  $x \in [-\pi, 0]$  die Abschätzung

$$|f(x) - T_2(x)| < \frac{5}{8}|x|^4.$$

Finden Sie sogar eine bessere Abschätzung?

### Aufgabe 4

Gegeben sei die Funktion  $f : ]-1, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$ .

- Bestimmen Sie das  $n$ -te Taylorpolynom  $T_n$  von  $f$  um  $x_0 = 0$ .
- Zeigen Sie für alle  $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$  die Abschätzung

$$|f(x) - T_3(x)| < \frac{1}{48}$$

- Zeigen Sie: Für alle  $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$  gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} |f(x) - T_n(x)| = 0$
- Zeichnen Sie (z.B. mit Maple) die Graphen von  $f(x)$  und  $T_3(x)$ .