

2. Hausaufgabe zur Vorlesung Analysis III

Aufgabe 1:

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ sternförmig und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine **harmonische** Funktion, d. h. $f \in C^2(U)$ und $f_{xx} + f_{yy} = 0$.
Zeige: Das Vektorfeld $(f_y, -f_x)$ hat eine Stammfunktion.

Aufgabe 2:

Berechne die folgenden Wegintegrale mit Hilfe der Green'schen Formel:

$$\text{a) } \int_{\partial K} 2y \, dx + 6x \, dy \quad K = [0, 1] \times [0, 1]$$

$$\text{b) } \int_{\partial K} y^2 \, dx + 2x \, dy \quad K = [0, 1] \times [0, 1]$$

$$\text{c) } \int_{\partial K} e^x (\sin y \, dx + \cos y \, dy), \quad K = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \leq 3\}.$$

Aufgabe 3:

Berechne die Arbeit, die das Kraftfeld $(3x + 4y, 8x + 9y)$ leistet, wenn es einen Massepunkt einmal um die Ellipse $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ bewegt.