3. Hausaufgabe zur Vorlesung Analysis III

Aufgabe 1:
Berechne die folgenden Wegintegrale:

a) $\displaystyle\int_{[\gamma]} \frac{x}{x^2+y^2}\,ds$, wobei $\gamma(t)$ den Einheitskreis in $\mathbb{R}^2$ parametrisiert.

b) $\displaystyle\int_{[\gamma]} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,ds$, wobei $\gamma(t) = (t\cos t, t\sin t, t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

Aufgabe 2:

a) Bestimme alle $p \in [1, \infty]$, für die gilt:
$S_p := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \,\big|\, \|x\|_p = 1\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ ist eine Untermannigfaltigkeit der Dimension n.

b) Ist $p \in [1, \infty]$ so, dass $S_p \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ eine Untermannigfaltigkeit ist, so bestimme für jedes $x \in S_p$ den Tangential- und Normalraum T_xS_p und N_xS_p.

Aufgabe 3:
Sei $\Gamma := \{x \in \mathbb{R}^n \,\big|\, \sum_{i=1}^{n} x_i^k = 1 \text{ für } k = 1, ..., n-1\}$.
Zeige: Γ ist die Spur eines Weges.
Hinweis: Versuche nicht, eine Parametrisierung von Γ zu bestimmen.
Verwende die Formel: $\det\begin{pmatrix} 1 & y_1 & \dots & y_1^{l-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & y_l & \dots & y_l^{l-1} \end{pmatrix} = \prod_{i<j} (y_j - y_i)$

Aufgabe 4:
Berechne die folgenden Flächenintegrale:

a) $\displaystyle\int_{\Sigma} \sqrt{1-x^2-y^2}\,dS$, wobei $\sum \subseteq \mathbb{R}^3$ die obere Halbsphäre ist.

b) $\displaystyle\int_{\Sigma} z^2\,dS$, wobei $\sum \subseteq \mathbb{R}^3$ der Teil des Kegels $z^2 = x^2 + y^2$ ist, für den $1 \leq z \leq 16$ gilt. (Skizze!)