4. Hausaufgabe zur Vorlesung Analysis III

Aufgabe 1:
Eine **Rotationsfläche** ist eine Menge der Form
$M = \left\{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} \,\middle|\, t \in I,\ x \in \mathbb{R}^n, \|x\| = f(t)\right\}$, wobei $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^+$ eine differenzierbare Funktion ist, $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall.

a) Zeige: $M \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ ist eine orientierbare n-dimensionale Untermannigfaltigkeit, und bestimme ein Normalenfeld auf M.

b) Berechne das Volumen der Sphäre $S_r^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = r\}$, wobei $r > 0$ fest ist.
Hinweis: Wende den Gauß'schen Integralsatz auf das Vektorfeld $X = \frac{1}{r}\,x$ an. Schreibe V_k für das Volumen der Einheitskugel in $\mathbb{R}^k$.

c) Sei $[a,b] \subseteq I$ und $M_{[a,b]} = \{(x,t) \in M \mid t \in [a,b]\}$.
Zeige: $Vol(M_{[a,b]}) = n\,V_n \int\limits_a^b f(t)^{n-1}\sqrt{1+f'(t)^2}\,dt$, wobei V_n das Volumen der Einheitskugel in $\mathbb{R}^n$ ist.
Hinweis: Wende den Gauß'schen Integralsatz auf das Vektorfeld
$X = \left(\frac{\sqrt{1+f'(t)^2}}{f(t)}\,x,\ 0\right)$ an.

Aufgabe 2:
Sei $X = (3x, 4y, 5z)$ ein Vektorfeld auf $\mathbb{R}^3$ und $S := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2+y^2+z^2 = 4\right\}$. Bestimme den Fluß von X durch S

a) mit Hilfe der Definition

b) durch Anwendung des Gauß'schen Integralsatzes.

Aufgabe 3:
Sei $X = (x^2, y^2, z^2)$. Bestimme den Fluß von X durch $\sum$, wobei $\sum$ die Vereinigung der oberen Halbsphäre vom Radius $1 (z > 0)$ mit dem Inneren der Einheitskreisscheibe in der xy-Ebene ist.