5. Hausaufgabe zur Vorlesung Analysis III

Aufgabe 1:
Sei $U \subseteq \mathbb{R}^3$ offen und $X = (X_1, X_2, X_3)$ ein differenzierbares Vektorfeld auf U.
Zeige: Für alle $v, w \in \mathbb{R}^3$ gilt:

$$(dX\,v) \cdot w - (dX\,w) \cdot v = (v \times w) \cdot Rot(X),$$

wobei $dX = \left(\frac{\partial X_i}{\partial x_j}\right)_{i,j=1,2,3}$ die Jacobimatrix von X ist.

Hinweis: Zeige dies zunächst für $v = e_i,\ w = e_j$, wobei e_1, e_2, e_3 die Standardbasis des $\mathbb{R}^3$ ist.

Aufgabe 2:
Sei C die Schnittkurve des Paraboloids $z = x^2 + y^2$ und der Ebene $z = y$. Sei $X := (xy, x^2, z^2)$. Bestimme $\int\limits_C X \cdot ds$.

Hinweis: Verwende den Satz von Stokes.

Aufgabe 3:
Sei S die Einheitssphäre und sei X ein beliebiges stetig differenzierbares Vektorfeld, das auf einer Umgebung von S definiert ist.
Zeige: $\int\limits_S N \cdot RotX \; dS = 0$.

Aufgabe 4:
Sei $\sum := \left\{(x, y, z) \,\middle|\, x^2 + y^2 \leq 1,\ z = 0\right\}$, und sei $X := \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, -\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ 0\right)$.

Zeige: $RotX = 0$, aber $\int\limits_{\partial \sum} X \cdot ds = 2\pi \neq 0$.

Warum widerspricht dies nicht dem Satz von Stokes?