7. Hausaufgabe zur Vorlesung Analysis III

Aufgabe 1:
Bestimme alle Lösungen der folgenden Differentialgleichungen:

a) $x''(t) - 2x'(t) - 3x(t) = e^t$

b) $x''(t) - x(t) = te^t$

c) $x''(t) + x(t) = \dfrac{1}{\cos t}, \quad t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Aufgabe 2:
Sei $(c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2 \backslash 0$ und sei $\omega > 0$.

a) Zeige: Es gibt genau ein $A > 0$ und $t_0 \in [0, \frac{2\pi}{\omega})$, so dass für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt:

$$c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t = A \cos \omega (t - t_0).$$

b) Bestimme A und t_0 für die Funktion $f(t) = \cos t - \sqrt{3} \sin t$.

Aufgabe 3:
Sei $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(t, x) := |x|^p$ für eine Konstante $p > 0$.

a) Zeige: Ist $x_0 \neq 0$, so ist f lokal Lipschitzstetig in x bei (t_0, x_0).

b) Sei $p < 1$. Zeige: f ist **nicht** lokal Lipschitzstetig in x bei $(t_0, 0)$.

c) Sei $p \geq 1$. Zeige: f ist lokal Lipschitzstetig in x.
Hinweis: Zeige zunächst mit Hilfe des Mittelwertsatzes:
Für $a, b \in [0, 1]$ gilt: $|b^p - a^p| \leq p|b - a|$.