8. Hausaufgabe zur Vorlesung Analysis III

Aufgabe 1:
Sei $y^{(n)}(t)+\alpha_1 y^{(n-1)}(t)+...+\alpha_{n-1}y'(t)+\alpha_n y(t)=0$ eine lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Zeige:

a) Wenn das Polynom $p(x) := x^n+\alpha_1 x^{n-1}+...+\alpha_{n-1}x+\alpha_n$ genau n paarweise verschiedene Nullstellen $\lambda_1,...,\lambda_n \in \mathbb{R}$ besitzt, dann sind $y(t)=c_1e^{\lambda_1 t}+...+c_ne^{\lambda_n t}$ mit beliebigen $c_1,...,c_n \in \mathbb{R}$ Lösungen der obigen DGL.

b) Wenn p genau n paarweise verschiedene Nullstellen $\lambda_1,...,\lambda_k,\ \mu_1 \pm i\sigma_1,...,\mu_l \pm i\sigma_l$ mit $\lambda_1,...,\lambda_k,\ \mu_1,...,\mu_l,\ \sigma_1,...,\sigma_l \in \mathbb{R}$ und $k+2l=n$ besitzt, dann lösen

$$y(t)=\sum_{j=1}^{k} c_je^{\lambda_j t}+\sum_{j=1}^{l}(d_je^{\mu_j t}\sin(\sigma_j t)+e_je^{\mu_j t}\cos(\sigma_j t))$$

mit $c_j, d_j, e_j \in \mathbb{R}$ beliebig die obige DGL.

c) Angenommen p besitzt wieder genau die Nullstellen $\lambda_1,...,\lambda_k,\ \mu_1 \pm i\sigma_1,...,\mu_l \pm i\sigma_l$, von denen einige einfach und einige doppelt sind. Ohne Einschränkung seien $\lambda_1,...,\lambda_{k'}$ sowie $\mu_1 \pm i\sigma_1,...,\mu_{l'} \pm i\sigma_{l'}$ mit $k' \leq k,\ l' \leq l$ doppelte Nullstellen und alle weiteren Nullstellen einfach. Dann lösen

$$\begin{aligned} y(t) &= \sum_{j=1}^{k} c_je^{\lambda_j t}+\sum_{j=1}^{k'} c'_jte^{\lambda_j t} \\ &+\sum_{j=1}^{l}\big(d_je^{\mu_j t}\sin(\sigma_j t)+e_je^{\mu_j t}\cos(\sigma_j t)\big) \\ &+\sum_{j=1}^{l'}\big(d'_jte^{\mu_j t}\sin(\sigma_j t)+e'_jte^{\mu_j t}\cos(\sigma_j t)\big) \end{aligned}$$

mit $c_j, c'_j, d_j, d'_j, e_j, e'_j \in \mathbb{R}$ beliebig die obige DGL.

Aufgabe 2:
Benutze die in Aufgabe 1 entwickelte Theorie, um die folgenden Differentialgleichungen zu lösen:

a) $y''-3y'+y=0$,

b) $y'''+4y''+5y'+2y=0$,

c) $y^{(4)}+2y''+y=0$,

d) $y^{(6)}=y$.

Aufgabe 3:
Löse das folgende Differentialgleichungssystem:

$$x'(t) + 2x(t) + y(t) - \sin t = 0$$

$$y'(t) - x(t) = 0$$

Tipp: Führe das Differentialgleichungssystem auf eine einzelne Differentialgleichung zurück.

Aufgabe 4:
Definiere die Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $y_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ wie folgt:

$$y_0(x) = 0, \qquad y_{n+1}(x) = \int_0^x (y_n(t) - t + 1)dt$$

a) Bestimme y_1, y_2, y_3.

b) Finde und beweise eine Formel für y_n.

c) Bestimme den punktweisen Limes y von y_n.

d) Zeige: $y(x) = \int_0^x y(t) - t + 1dt$.

e) Leite aus der obigen Integralgleichung ein Anfangswertproblem für eine Differentialgleichung her, welches durch $y(x)$ gelöst wird.

Aufgabe 5:
Definiere die Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $z_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ für alle $n \in \mathbb{N}$ wie folgt:

$$z_0(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; z_{n+1}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} z_n(\tau)d\tau.$$

Übertrage die Anweisungen von Aufgabe 4 sinngemäß auf diese Aufgabe und führe diese Anweisungen durch.