9. Hausaufgabe zur Vorlesung Analysis III

Aufgabe 1:
Bestimme die maximalen Lösungen $x_{(t_0,x_0)} : J_{(t_0,x_0)} \longrightarrow \mathbb{R}$ der folgenden Differentialgleichungen sowie die Abbildung

$$X : V \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad X(t,t_0,x_0) := x_{(t_0,x_0)}(t),$$

wobei $V := \{(t,t_0,x_0) \in \mathbb{R}^3 | t \in J_{(t_0,x_0)}\}$.

a) $(1+t^2)\ x'(t) = 1 + x(t)^2$

b) $(1+e^t)\dfrac{dx}{dt} + (1-e^{-x})e^{x+t} = 0$

c) $t\dfrac{dx}{dt} + x = t\sin(t^2) + 5t$

d) $x'(t) = \dfrac{1}{t^2}(t\ x(t) + 1)$

Hinweis: Vgl. Aufgabe 2, Hausaufgabenblatt 6.

Aufgabe 2:
Sei $U := (a,b) \times \mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, wobei $-\infty \leq a < b \leq \infty$, und sei $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitzstetig bzgl. x. Sei $x : (\tilde{a},\tilde{b}) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine maximale Lösung der Differentialgleichung $x'(t) = f(t,x(t))$, wobei $(\tilde{a},\tilde{b}) \subseteq (a,b)$.

Zeige:
a) Entweder $b = \tilde{b}$, oder $\lim\limits_{t\to\tilde{b}^-} \|x(t)\| = \infty$.

b) Entweder $a = \tilde{a}$, oder $\lim\limits_{t\to\tilde{a}^+} \|x(t)\| = \infty$.

Aufgabe 3:
Bestimme alle Lösungen der Differentialgleichungen

$$x'(t) = x(t) - 2y(t)$$
$$y'(t) = x(t) + 4y(t).$$