# 10. Hausaufgabe zur Vorlesung Analysis III

---

**Aufgabe 1:**
Bestimme $\exp t\,A,\ t \in \mathbb{R}$ für die folgenden Matrizen:

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, b) $A = \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{pmatrix}$, $\omega > 0$ konstant,

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

und bestimme in diesen Fällen die Lösungen der Differentialgleichungen
$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$.

**Aufgabe 2:**
Bestimme, welche der folgenden Funktionen holomorph sind.

a) $f(x+iy) = x^2 - 2x - y^2 + 2iy(x-1)$

b) $f(x+iy) = x^2 + y^2$

c) $f(x+iy) = \cos x - i \sin y$

**Aufgabe 3:**
Zeige: Die Funktion $f : \mathbb{C}\backslash\{0\} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) = \frac{1}{z}$ ist holomorph, hat aber keine Stammfunktion.

**Aufgabe 4:**
Sei $f : B_r(z_0) \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph, wobei $B_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \big| |z - z_0| < r\}$. Außerdem sei $f(z_0) = 0$ und $f'(z_0) \neq 0$.

a) Zeige: Es gibt ein $\varepsilon > 0$, so dass für alle $z \in B_\varepsilon(z_0)\backslash\{z_0\}$ gilt: $f(z) \neq 0$.

b) Zeige: Für alle $\delta > 0$ mit $\delta < \varepsilon$ gilt:

$$\int\limits_{K_{\delta(z_0)}} \frac{1}{f(z)} dz = \frac{2\pi i}{f'(z_0)} \ ,$$

wobei $K_\delta(z_0)$ der Kreis um $z_0$ vom Radius $\delta$ mit der positiven Orientierung ist.

**Hinweis:** Zeige zunächst, dass der Wert dieses Integrals unabhängig von $\delta \in (0, \varepsilon)$ ist, und bestimme dann $\lim\limits_{\delta \to 0^+} \int\limits_{K_\delta(z_0)} \frac{1}{f(z)} dz$.